

# **Hľadanie koreňov komplexných funkcií**

## **On locating clusters of zeros of analytic functions**

## Zadání diplomové práce

Student: **Bc. Erika Straková**  
Studijní program: N2647 Informační a komunikační technologie  
Studijní obor: 1103T031 Výpočetní matematika  
Téma: **Hledání kořenů komplexních funkcí**  
**On Locating Clusters Of Zeros Of Analytic Functions**  
Jazyk vypracování: čeština

### Zásady pro vypracování:

Práce bude zaměřena na hledání (komplexních) kořenů (ležících ve vnitřku jisté Jordanovy křivky) analytických funkcí.

Výsledky bude možné později použít na hledání vlastních čísel matic.

Pro zdárné pochopení tématu si student bude muset - kromě jiného - osvojit teorii komplexních funkcí komplexní proměnné - a to především teorii reziduí.

### Seznam doporučené odborné literatury:

P. Kravanja, T. Sakurai, M. Van Barel: On Locating Clusters Of Zeros Of Analytic Functions  
L.M. Delves, J.N. Lyness: A Numerical Method for Locating the Zeros of an Analytic Function

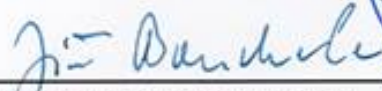
dále dle pokynů vedoucího práce

Formální náležitosti a rozsah diplomové práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.


Vedoucí diplomové práce: **Mgr. Petr Vodstrčil, Ph.D.**

Datum zadání: 01.09.2015

Datum odevzdání: 29.04.2016

  
doc. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.  
vedoucí katedry



  
prof. RNDr. Václav Snášel, CSc.  
děkan fakulty

Prehlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracovala samostatne. Uviedla som všetky literárne pramene a publikácie, z ktorých som čerpala.

V Ostrave 28. apríla 2016

.....*Straková*.....

Rada by som sa poďakovala vedúcemu práce, Mgr. Petrovi Vodstrčilovi, Ph.D. za ochotu, čas venovaný konzultáciám a cenné rady pri tvorbe tejto práce. Taktiež by som sa rada poďakovala doc. Ing. Daliborovi Lukášovi, Ph.D. za rady a poskytnutie potrebnej literatúry.

## Abstrakt

Táto práca sa zaoberá hľadaním koreňov holomorfných funkcií. V prvej časti práce pripomenieme niektoré pojmy z komplexnej analýzy, ktoré budú v práci často používané. Potom sa zameriame na známe vety z komplexnej analýzy, týkajúce sa koreňov holomorfných funkcií. Z týchto viet bude v druhej časti práce dôležitý dôsledok Reziduovej vety. Prvá časť práce taktiež obsahuje niektoré dôkazy Základnej vety algebry. Druhá časť práce popisuje metódy hľadania koreňov holomorfných funkcií - metódu Newtonových súm a metódu založenú na formálnych ortogonálnych polynómoch.

**Kľúčové slová:** korene holomorfnej funkcie, reziduum, Reziduová veta, Základná veta algebry, Newtonove sumy, formálny ortogonálny polynóm

## Abstract

This thesis deals with the locating zeros of holomorphic functions. In the first part of the thesis some concepts of complex analysis are mentioned, which will be frequently used in this thesis. Then, we devote to known theorems of complex analysis relating to zeros of holomorphic functions. From these theorems will be important the consequence of Residue theorem, but it will be shown in the second part of thesis. The first part of thesis also contains some proofs of Fundamental theorem of algebra. The second part of thesis describes methods for locating zeros of analytic functions - method of Newton sums and method based on formal orthogonal polynomials.

**Keywords:** zeros of holomorphic function, residue, Residue theorem, Fundamental theorem of algebra, Newton sums, formal orthogonal polynomial

### Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Prehľad pojmov z komplexnej analýzy</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Vlastnosti koreňov komplexných funkcií</b>	<b>12</b>
<b>4</b>	<b>Základná veta algebry</b>	<b>25</b>
<b>5</b>	<b>Metóda Newtonových súm</b>	<b>30</b>
5.1	Newtonove vzťahy . . . . .	30
5.2	Numerická integrácia . . . . .	32
5.3	Numerické výsledky . . . . .	34
<b>6</b>	<b>Formálne ortogonálne polynómy</b>	<b>41</b>
6.1	Vlastnosti formálnych ortogonálnych polynómov . . . . .	41
6.2	Algoritmus . . . . .	57
6.3	Numerické výsledky . . . . .	60
<b>7</b>	<b>Záver</b>	<b>64</b>
<b>8</b>	<b>Literatúra</b>	<b>65</b>
	<b>Prílohy</b>	<b>66</b>
<b>A</b>	<b>Prílohy na CD</b>	<b>66</b>

### 1 Úvod

Táto práca je zameraná na hľadanie koreňov analytickej (holomorfnej) funkcie, ktoré ležia vo vnútri istej krivky.

Prvá kapitola obsahuje prehľad pojmov z komplexnej analýzy, ktoré sú potrebné pre formuláciu ďalších viet, ktoré sú obsiahnuté v ďalších kapitolách. Druhá kapitola je venovaná vlastnostiam koreňov komplexných funkcií. Obsahuje známe vety spolu s dôkazmi z komplexnej analýzy, ktoré častokrát v reálnom obore neplatia. Na dôsledkoch známej Reziduovej vety sú potom založené metódy hľadania koreňov komplexných funkcií, popísané v posledných dvoch kapitolách. Tretia kapitola obsahuje dôkazy Základnej vety algebry, využívajúce tvrdenia z predchádzajúcej kapitoly.

Posledné dve kapitoly predstavujú metódy hľadania koreňov holomorných funkcií vo vnútri danej krivky. Prvá metóda je založená na Newtonových vzorcoch, ktoré využívajú súčty mocnín všetkých koreňov vo vnútri uvažovanej krivky. Druhá metóda je založená na formálnych ortogonálnych polynómoch. Tieto polynómy sú istým spôsobom kolmé na všetky polynómy nižšieho stupňa. Korene formálneho ortogonálneho polynómu stupňa  $n$ , kde  $n$  je počet navzájom rôznych koreňov uvažovanej funkcie  $f$  vo vnútri danej krivky, budú potom rovnaké ako korene  $f$ .

Posledné dve kapitoly obsahujú tiež numerické výsledky a porovnanie oboch metód.

### 2 Prehľad pojmov z komplexnej analýzy

Predtým, ako začneme rozoberať problematiku hľadania koreňov analytických (holomorfných) funkcií, pripomeňme si niektoré zo základných pojmov či viet z komplexnej analýzy. Omnoho viac nájdeme v [1].

**Definícia 2.1.** Množinu  $\mathbb{C}_\infty$  definujeme

$$\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

**Poznámka 2.2.** Existuje vzájomne jednoznačný vzťah medzi bodmi  $\mathbb{R}^2$  a bodmi  $\mathbb{C}$ :

$$(x, y) \leftrightarrow x + iy.$$

**Definícia 2.3.** Okolím bodu  $z_0 \in \mathbb{C}$  resp.  $\infty$  s polomerom  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  budeme rozumieť množinu

$$U(z_0, \varepsilon) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$$

resp. množinu

$$U(\infty, \varepsilon) := \{z \in \mathbb{C} : |z| > \frac{1}{\varepsilon}\} \cup \{\infty\}.$$

**Prstencovým okolím bodu**  $z \in \mathbb{C}_\infty$  s polomerom  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  rozumieme množinu

$$P(z, \varepsilon) := U(z, \varepsilon) \setminus \{z\}.$$

Pokiaľ nezáleží na konkrétnej hodnote  $\varepsilon$ , píšeme  $U(z)$  resp.  $P(z)$ .

**Definícia 2.4. (Hromadný bod)**

Nech  $M \subset \mathbb{C}_\infty$ . Bod  $z \in \mathbb{C}_\infty$  nazveme **hromadným bodom** množiny  $M$ , pokiaľ v každom jeho okolí leží nekonečne mnoho bodov množiny  $M$ .

**Poznámka 2.5.** Pripomeňme, že  $z \in \mathbb{C}_\infty$  je hromadným bodom množiny  $M \subset \mathbb{C}_\infty$  práve vtedy keď existuje postupnosť  $(z_n)$  v  $M \setminus \{z\}$  taká, že  $z_n \rightarrow z$ .

**Definícia 2.6.** Nech  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Funkciu

$$u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ resp. } v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

definovanú predpisom

$$u(x, y) := \operatorname{Re} f(x + iy) \text{ resp. } v(x, y) := \operatorname{Im} f(x + iy)$$

nazývame **reálnou** resp. **imaginárnou** časťou funkcie  $f$ .

Skutočnosť, že  $u$  resp.  $v$  je reálnou resp. imaginárnou časťou funkcie  $f$  budeme zapisovať symbolom

$$f = u + iv.$$



## 2 PREHL'AD POJMOV Z KOMPLEXNEJ ANALÝZY

**Definícia 2.7.** Hovoríme, že funkcia  $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  má v bode  $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$  limitu  $a \in \mathbb{C}_\infty$  a píšeme  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a$ , pokiaľ platí implikácia

$$z_0 \neq z_n \rightarrow z_0 \Rightarrow f(z_n) \rightarrow a$$

(to znamená, že pre každú postupnosť  $(z_n)$  takú, že  $z_0 \neq z_n \rightarrow z_0$ , platí, že  $f(z_n) \rightarrow a$ ).

**Definícia 2.8.** Hovoríme, že funkcia  $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  je spojitá v bode  $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$ , pokiaľ platí

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Hovoríme, že funkcia  $f$  je spojitá na množine  $M \subset \mathbb{C}_\infty$ , pokiaľ platí pre každé  $z_0 \in M$  implikácia

$$\left. \begin{array}{l} z_n \rightarrow z_0 \\ \forall n \in \mathbb{N} : z_n \in M \end{array} \right\} \Rightarrow f(z_n) \rightarrow f(z_0).$$

Hovoríme, že funkcia  $f$  je spojitá, pokiaľ je spojitá na svojom definičnom obore.

**Definícia 2.9.** Funkcia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  má v bode  $t_0 \in \mathbb{R}$  limitu  $a \in \mathbb{C}_\infty$  a píšeme  $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = a$ , pokiaľ platí

$$t_0 \neq t_n \rightarrow t_0 \text{ (v } \mathbb{R}) \Rightarrow f(t_n) \rightarrow a.$$

Funkcia  $f$  je spojitá v bode  $t_0 \in \mathbb{R}$ , pokiaľ platí

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0).$$

Funkcia  $f$  je spojitá na množine  $M \subset \mathbb{R}$ , pokiaľ pre každé  $t_0 \in M$  platí

$$\left. \begin{array}{l} t_n \rightarrow t_0 \\ \forall n \in \mathbb{N} : t_n \in M \end{array} \right\} \Rightarrow f(t_n) \rightarrow f(t_0).$$

Funkcia  $f$  je spojitá, pokiaľ je spojitá na svojom definičnom obore.

**Definícia 2.10.** *Krivka* v  $\mathbb{C}_\infty$  (resp. v  $\mathbb{C}$ ) je spojitá komplexná funkcia reálnej premennej

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}_\infty \quad (\text{resp. } \gamma : I \rightarrow \mathbb{C}),$$

kde  $I = D_\gamma \subset \mathbb{R}$  je interval. Množinu

$$\langle \gamma \rangle := \gamma(I) = \{\gamma(t) : t \in I\} \subset \mathbb{C}_\infty$$

nazývame **geometrickým obrazom** krivky  $\gamma$ . (Poznamenajme, že rôzne krivky môžu mať rovnaké geometrické obrazy).

Krivku  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  nazývame

- **jednoduchou**, pokiaľ  $\gamma$  je prosté na  $I$
- **uzatvorenou**, pokiaľ  $I = \langle a, b \rangle$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ;  $a < b$ ) a navyše  $\gamma(a) = \gamma(b)$ ,

## 2 PREHL'AD POJMOV Z KOMPLEXNEJ ANALÝZY

- *jednoduchou uzatvorenou*, pokiaľ  $\gamma : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  je uzatvorená a platí

$$\forall t_1, t_2 \in \langle a, b \rangle : [0 < |t_1 - t_2| < b - a \Rightarrow \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)].$$

Pokiaľ  $I = \langle a, b \rangle$ , bod  $\gamma(a)$  nazývame *počiatočným bodom* a bod  $\gamma(b)$  nazývame *koncovým bodom* krivky  $\gamma$ .

**Krivku opačne orientovanú** ku krivke  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  rozumieme krivku

$$-\gamma : J \rightarrow \mathbb{C}_\infty, \quad \text{kde } J = \{t \in \mathbb{R} : -t \in I\} \quad \text{a} \quad (-\gamma)(t) := \gamma(-t).$$

**Poznámka 2.11.** Krivku  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  môžeme písať v tvare

$$\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2,$$

kde  $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definícia 2.12.** Deriváciou krivky  $\gamma$  v intervale  $\langle a, b \rangle$  rozumieme funkciu  $g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{C}$  definovanú predpisom

$$g(t) = \begin{cases} \gamma'_+(a) = (\gamma_1)'_+(a) + i(\gamma_2)'_+(a), & t = a; \\ \gamma'(t) = \gamma'_1(t) + i\gamma'_2(t), & t \in (a, b); \\ \gamma'_-(b) = (\gamma_1)'_-(b) + i(\gamma_2)'_-(b), & t = b. \end{cases}$$

Pokiaľ je takto definovaná derivácia spojitá v intervale  $\langle a, b \rangle$ , hovoríme, že krivka  $\gamma$  je **regulárna**. Krivka  $\gamma$  sa nazýva **po častiach regulárna**, pokiaľ existuje delenie

$$D : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

intervalu  $\langle a, b \rangle$  také, že pre každé  $i \in \{1, \dots, n\}$  je krivka

$$\psi_i := \gamma|_{\langle t_{i-1}, t_i \rangle}$$

regulárna.

**Poznámka 2.13.** Dĺžkou krivky  $\gamma : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{C}$  budeme rozumieť  $\int_a^b |\gamma'(t)| dt$ .

**Dohoda 2.14.** Pokiaľ nebude povedané inak, ďalej v texte pojem krivka bude znamenať vždy po častiach regulárna krivka.

**Definícia 2.15.**

- **Uzáver množiny**  $M \subset \mathbb{C}_\infty$  je množina

$$\overline{M} := \{z \in \mathbb{C}_\infty : \text{existuje postupnosť } (z_n) \subset M \text{ taká, že } z_n \rightarrow z\}.$$

- Množiny  $A, B \subset \mathbb{C}_\infty$  nazývame **oddelenými**, pokiaľ platí

$$\overline{A} \cap B = \emptyset \wedge A \cap \overline{B} = \emptyset.$$

## 2 PREHL'AD POJMOV Z KOMPLEXNEJ ANALÝZY

- Množina  $M \subset \mathbb{C}_\infty$  sa nazýva **súvislá**, pokiaľ ju nejde napísať ako zjednotenie dvoch neprázdnych oddelených množín. Tzn.

$$\left. \begin{array}{l} M = A \cup B \\ \overline{A} \cap B = \emptyset, A \cap \overline{B} = \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow [A = \emptyset \vee B = \emptyset].$$

**Definícia 2.16.** Množina  $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$  sa nazýva **oblasť**, pokiaľ súčasne platí

- $\Omega$  je otvorená množina (tzn. s každým bodom obsahuje aj okolie tohoto bodu),
- $\Omega$  je súvislá množina (v prípade otvorenej množiny to znamená, že každé dva body v  $\Omega$  je možno spojiť krivkou v  $\Omega$ ).

**Definícia 2.17.** Nech  $M \subset \mathbb{C}_\infty$ . Množinu  $K \subset M$  nazývame **komponentou množiny**  $M$ , pokiaľ súčasne platí

- $K$  je súvislá množina,
- pokiaľ  $\tilde{K} \subset M$  je súvislá množina taká, že  $K \subset \tilde{K}$ , potom  $K = \tilde{K}$ .

**Definícia 2.18.** Oblasť  $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$  taká, že množina  $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$  má práve  $n$  rôznych komponent, sa nazýva  **$n$ -násobne súvislá oblasť**. V prípade  $n = 1$ , sa oblasť  $\Omega$  nazýva **jednoducho súvislá oblasť**.

**Definícia 2.19.** Nech  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .

Deriváciu funkcie  $f$  v bode  $z_0 \in \mathbb{C}$  definujeme ako

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

ak existuje limita vpravo a je konečná.

Hovoríme, že funkcia  $f$  je **holomorfná na otvorenej množine**  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , ak  $f'(z)$  existuje pre každé  $z \in \Omega$ .

Hovoríme, že funkcia  $f$  je **holomorfná v bode**  $z_0 \in \mathbb{C}$ , ak je holomorfná na nejakom okolí bodu  $z_0$ .

**Poznámka 2.20.** Existencia derivácie funkcie  $f$  v nejakom bode  $z_0$  nie je to isté ako holomorfnosť funkcie  $f$  v bode  $z_0$ . Napríklad funkcia  $f(z) = |z|^2$  má deriváciu v bode  $z_0 = 0$  (má deriváciu len v bode  $z_0 = 0$ ), ale nie je v bode  $z_0$  holomorfná.

**Veta 2.21.** Funkcia  $f = u + iv$  má v bode  $z_0 = x_0 + iy_0$  deriváciu práve vtedy, pokiaľ platia nasledujúce podmienky:

- $u$  a  $v$  sú diferencovateľné v bode  $(x_0, y_0)$ ,
- $u$  a  $v$  splňujú v bode  $(x_0, y_0)$  **Cauchy-Riemannove podmienky**:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} &= \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} &= -\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}. \end{aligned}$$

## 2 PREHL'AD POJMOV Z KOMPLEXNEJ ANALÝZY

Pokiaľ  $f'(z_0)$  existuje, potom platí

$$f'(z_0) = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} - i \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}.$$

**Veta 2.22.** Nech  $f = u + iv$  je holomorfná na oblasti  $\Omega \subset \mathbb{C}$ . Potom pre všetky  $(x, y) \in \Omega$  platí:

- (i)  $u$  a  $v$  majú v bode  $(x, y)$  spojité všetky parciálne derivácie až do druhého rádu vrátane,
- (ii)

$$\Delta u(x, y) := \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0 = \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} =: \Delta v(x, y).$$

(Pokiaľ funkcie  $u, v$  splňujú vyššie uvedené podmienky, budeme hovoriť, že  $u, v$  sú harmonické na  $\Omega$ .)

**Definícia 2.23.** Nech funkcia  $f$  je holomorfná v bode  $z_0 \in \mathbb{C}$  a nech  $p \in \mathbb{N}$ . Hovoríme, že  $z_0$  je  $p$ -násobným koreňom funkcie  $f$ , ak platí

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(p-1)}(z_0) = 0 \neq f^{(p)}(z_0).$$

**Príklad 2.24.** Majme funkciu  $f$  definovanú predpisom

$$f(z) = z - \sin z.$$

Bod  $z_0 = 0$  je 3-násobný koreň funkcie  $f$ , pretože  $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$  a  $f'''(0) = \cos 0 = 1 \neq 0$ .

**Veta 2.25. (Jordanova)**

Nech  $\gamma$  je jednoduchá uzatvorená krivka v  $\mathbb{C}$ . Potom

$$\mathbb{C}_\infty \setminus \langle \gamma \rangle = \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

kde  $\Omega_1$  a  $\Omega_2$  sú dve disjunktné, neprázdne a jednoducho súvislé oblasti, ktorých spoločnou hranicou je  $\langle \gamma \rangle$ .

Tú z oblastí  $\Omega_1, \Omega_2$ , ktorá neobsahuje  $\infty$ , budeme nazývať **vnútrom krivky**  $\gamma$  a budeme značiť  $\text{int } \gamma$ , a tú, ktorá obsahuje  $\infty$ , budeme nazývať **vonkajšok krivky**  $\gamma$  a budeme značiť  $\text{ext } \gamma$ .

**Definícia 2.26.** Nech funkcia  $f = u + iv : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  je spojitá na intervale  $\langle a, b \rangle$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ;  $a < b$ ). Potom definujeme

$$\int_a^b f(t) dt \stackrel{\text{def.}}{=} \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt.$$

**Poznámka 2.27.** Predchádzajúca definícia funguje aj pre po častiach spojitú funkciu  $f$ .

## 2 PREHL'AD POJMOV Z KOMPLEXNEJ ANALÝZY

### Definícia 2.28. (Krivkový integrál)

Nech  $\gamma : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{C}$  je krivka a  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  je spojitá na  $\langle \gamma \rangle$ . **Integrál z funkcie  $f$  pozdĺž krivky  $\gamma$**  definujeme rovnosťou

$$\int_{\gamma} f(z) dz \stackrel{\text{def.}}{=} \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

**Veta 2.29.** Nech  $\gamma : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{C}$  je krivka a nech funkcia  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  je spojitá na  $\langle \gamma \rangle$ . Platí:

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \text{dĺžka}(\gamma) \max_{z \in \langle \gamma \rangle} |f(z)|.$$

Dôkaz.

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \leq \\ &\leq \int_a^b \underbrace{\max_{z \in \langle \gamma \rangle} |f(z)|}_{\text{konst.}} |\gamma'(t)| dt = \max_{z \in \langle \gamma \rangle} |f(z)| \underbrace{\int_a^b |\gamma'(t)| dt}_{\text{dĺžka}(\gamma)} = \max_{z \in \langle \gamma \rangle} |f(z)| \text{dĺžka}(\gamma). \end{aligned}$$

□

**Poznámka 2.30.** V dôkaze predchádzajúcej vety 2.29 využívame skutočnosť, že pokiaľ  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  je spojitá  $\langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$ , potom platí

$$\left| \int_a^b g(t) dt \right| \leq \int_a^b |g(t)| dt. \quad (2.1)$$

Pre  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je nerovnosť (2.1) dobre známa. Ukážeme si, že nerovnosť (2.1) platí aj pre  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ .

Definujme  $I := \int_a^b g(t) dt \in \mathbb{C}$ . Potom platí

$$\begin{aligned} |I|^2 &= I \cdot \bar{I} = \bar{I} \int_a^b g(t) dt = \int_a^b \bar{I} g(t) dt = \int_a^b \text{Re}(\bar{I} g(t)) dt \leq \\ &\leq \int_a^b |\bar{I} g(t)| dt = \int_a^b |\bar{I}| |g(t)| dt = |\bar{I}| \int_a^b |g(t)| dt = |I| \int_a^b |g(t)| dt, \end{aligned}$$

z čoho plynie dokazovaná nerovnosť.

### Veta 2.31. (Cauchyho integrálne vzorce)

Nech  $\gamma$  je jednoduchá uzatvorená kladne orientovaná krivka v  $\mathbb{C}$  a nech funkcia  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  je holomorfná na  $\Omega = \text{int } \gamma$  a spojitá na  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \langle \gamma \rangle$ . Potom pre každé  $z_0 \in \Omega$  platí

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Naviac, pokiaľ je  $n \in \mathbb{N}$ , existuje  $f^{(n)}(z_0)$  pre každé  $z_0 \in \Omega$  a platí

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

## 2 PREHL'AD POJMOV Z KOMPLEXNEJ ANALÝZY

**Definícia 2.32.** *Mocninnou radou o strede  $z_0 \in \mathbb{C}$  nazývame funkčnú radu v tvare*

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

kde  $a_0, a_1, a_2, \dots$  sú komplexné čísla.

**Veta 2.33.** *(O rozvoji holomorfnej funkcie do Taylorovej rady)*

Nech funkcia  $f$  je holomorfná na okolí  $U(z_0, R)$ , kde  $z_0 \in \mathbb{C}$  a  $R \in (0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ .

Potom existuje práve jedna mocninná rada (Taylorova rada)  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  tak, že pre každé  $z \in U(z_0, R)$  platí

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Pokiaľ je  $\rho$  také ľubovoľné reálne číslo, že  $0 < \rho < R$ , potom pre koeficienty Taylorovho rozvoja funkcie  $f$  platí, že

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

kde

$$\gamma(t) := z_0 + \rho e^{it}, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

**Definícia 2.34.** *Laurentovou radou o strede  $z_0 \in \mathbb{C}$  nazývame radu v tvare*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (2.2)$$

kde  $\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots$  sú komplexné čísla (koeficienty Laurentovej rady).

Mocninnú radu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

budeme nazývať **regulárnou časťou Laurentovej rady** (2.2) a funkčnú radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(z - z_0)^n}$$

**hlavnou časťou Laurentovej rady** (2.2).

**Laurentova rada** (2.2) konverguje na množine  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , pokiaľ konverguje na  $\Omega$  jej regulárna aj hlavná časť. V takom prípade potom funkciu  $f$  definovanú na  $\Omega$  predpisom  $f(z) := f_1(z) + f_2(z)$ , kde  $f_1$  resp.  $f_2$  je súčtom regulárnej resp. hlavnej časti Laurentovej rady (2.2), nazývame **súčtom Laurentovej rady** (2.2).

## 2 PREHL'AD POJMOV Z KOMPLEXNEJ ANALÝZY

### Veta 2.35. (O rozvoji holomorfnej funkcie do Laurentovej rady)

Nech je funkcia  $f$  holomorfná na medzikruží  $P(z_0, r, R) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ , kde  $z_0 \in \mathbb{C}$  a  $0 \leq r < R \leq +\infty$ .

Potom existuje práve jedna Laurentova rada  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  tak, že pre každé  $z \in P(z_0, r, R)$  platí

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Pokiaľ je  $\rho$  také ľubovoľné reálne číslo, že  $r < \rho < R$ , potom pre koeficienty Laurentovho rozvoja funkcie  $f$  platí, že

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

kde

$$\gamma(t) := z_0 + \rho e^{it}, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

**Definícia 2.36.** Izolovanou singularitou funkcie  $f$  nazveme taký bod  $z_0 \in \mathbb{C}$ , pre ktorý sú splnené podmienky:

- funkcia  $f$  nie je holomorfná v bode  $z_0$ ,
- existuje prstencové okolí  $P(z_0)$ , kde je funkcia  $f$  holomorfná.

Pokiaľ je bod  $z_0$  izolovanou singularitou funkcie  $f$ , existuje kladné reálne číslo  $R$  také, že  $f$  je holomorfná na  $P(z_0, R) = P(z_0, 0, R)$  a preto funkciu  $f$  u na tomto okolí rozvinúť do Laurentovej rady (viď vetu 2.35). To znamená, že pre všetky  $z \in P(z_0, R)$  platí

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Podľa počtu nenulových koeficientov Laurentovej rady rozlišujeme 3 typy singularít:

- (1) v prípade, že všetky koeficienty hlavnej časti Laurentovej rady sú nulové (tzn.  $\forall n \in \mathbb{N} : a_{-n} = 0$ ), bod  $z_0$  nazveme **odstrániteľnou singularitou funkcie  $f$** ,
- (2) v prípade, že existuje aspoň jeden ale najviac konečne mnoho nenulových koeficientov hlavnej časti Laurentovej rady (tzn. existuje  $n \in \mathbb{N}$  tak, že  $a_{-n} \neq 0$  a pre každé  $k \in \mathbb{N}, k > n$ , je  $a_{-k} = 0$ ), bod  $z_0$  nazveme **pólom (násobnosti  $n$ ) funkcie  $f$**  (pól násobnosti 1 nazývame tiež jednoduchý pól),
- (3) v prípade, že existuje nekonečne mnoho nenulových koeficientov hlavnej časti Laurentovej rady, bod  $z_0$  nazveme **podstatnou singularitou funkcie  $f$** .

**Veta 2.37.** Nech  $z_0 \in \mathbb{C}$  je izolovaná singularita funkcie  $f$ . Potom platí:

- (i)  $z_0$  je odstrániteľnou singularitou funkcie  $f$  práve vtedy, keď

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \in \mathbb{C},$$

## 2 PREHL'AD POJMOV Z KOMPLEXNEJ ANALÝZY

(ii)  $z_0$  je pólom funkcie  $f$  (resp. pólom násobnosti  $n$  funkcie  $f$ ) práve vtedy, keď

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$$

$$\left( \text{resp. keď } \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^n f(z)] \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right),$$

(iii)  $z_0$  je podstatnou singularitou funkcie  $f$  práve vtedy, keď  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  neexistuje.

**Definícia 2.38.** Nech  $z_0 \in \mathbb{C}$  izolovaná singularita funkcie  $f$  a

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Laurenov rozvoj funkcie  $f$  na nejakom prstencovom okolí bodu  $z_0$ . Číslo  $a_{-1}$  nazveme reziduum funkcie  $f$  v bode  $z_0$  a označujeme  $\text{res } f(z_0)$ , resp.  $\text{res } f(z)$ .

**Poznámka 2.39.** Pre  $a_{-1}$  koeficient Laurentovho rozvoja funkcie  $f$  podľa vety 2.35 platí

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz.$$

**Veta 2.40.** Platí:

(i) Ak je funkcia  $f$  holomorfná v bode  $z_0 \in \mathbb{C}$  a funkcia  $g$  má v bode  $z_0$  jednoduchý pól, potom

$$\text{res}_{z=z_0} (f(z)g(z)) = f(z_0) \text{res}_{z=z_0} g(z).$$

(ii) Ak je bod  $z_0 \in \mathbb{C}$  pólom násobnosti  $k$  funkcie  $f$ , potom

$$\text{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left( \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left( f(z) (z - z_0)^k \right) \right).$$

(iii) Ak sú funkcie  $f, g$  holomorfné v bode  $z_0 \in \mathbb{C}$  a ak je bod  $z_0$  jednonásobným koreňom funkcie  $g$ , potom

$$\text{res}_{z=z_0} \left( \frac{f(z)}{g(z)} \right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

**Poznámka 2.41.** Špeciálne, ak je  $z_0 \in \mathbb{C}$  jednoduchý pól funkcie  $f$ , potom z vety 2.40 (ii) plynie

$$\text{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z)(z - z_0)).$$

**Veta 2.42. (Reziduová)**

Nech  $\gamma$  je jednoduchá uzatvorená kladne orientovaná krivka,  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  je holomorfná v  $\text{int } \gamma \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$  a spojitá v  $\overline{\text{int } \gamma} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$  a nech body  $z_1, \dots, z_n \in \text{int } \gamma$  sú navzájom rôzne izolované singularity funkcie  $f$ . Potom platí:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{res } f(z_i).$$



### 3 Vlastnosti koreňov komplexných funkcií

**Veta 3.1. (O jednoznačnosti holomorfnej funkcie)**

Nech  $\Omega \subset \mathbb{C}$  je oblasť,  $f$  a  $g$  sú funkcie holomorfne na  $\Omega$  a  $G \subset \Omega$  je taká množina, ktorá má hromadný bod v oblasti  $\Omega$ . Nech  $f(z) = g(z)$  pre všetky  $z \in G$ . Potom  $f(z) = g(z)$  pre všetky  $z \in \Omega$ .

*Dôkaz.* Označme

$$h \stackrel{\text{ozn.}}{=} f - g.$$

Potom  $h(z) = 0$  pre všetky  $z \in G$ . Označme

$$H \stackrel{\text{ozn.}}{=} \{z \in \Omega : h(z) = 0\} \supset G,$$

$$\tilde{H} \stackrel{\text{ozn.}}{=} \{z \in \Omega : z \text{ je hromadný bod množiny } H\}.$$

Z predpokladov vety je zrejmé  $\tilde{H}$  neprázdna. Taktiež platí, že  $\tilde{H} \subset H$ . Pretože pokiaľ  $x \in \tilde{H}$ , potom existuje postupnosť  $(x_n) \in H \setminus \{x\}$  tak, že  $x_n \rightarrow x$ . Zo spojitosti funkcie  $h$  potom plynie, že  $0 = h(x_n) \rightarrow h(x)$ , teda  $h(x) = 0$ , preto  $x \in H$ .

Dokážeme, že množina  $\tilde{H}$  je uzatvorená v  $\Omega$ , tzn. platí

$$((x_n) \subset \tilde{H} \wedge x_n \rightarrow x \in \Omega) \Rightarrow x \in \tilde{H},$$

a zároveň otvorená, tzn. platí

$$(\forall z_0 \in \tilde{H})(\exists U(z_0)) : U(z_0) \subset \tilde{H}.$$

- **uzatvorenosť**

Nech  $(x_n) \subset \tilde{H}$ ,  $x_n \rightarrow x \in \Omega$  a zvolíme  $\varepsilon > 0$  ľubovoľne. Z definície konverencie postupnosti  $(x_n)$  k číslu  $\frac{\varepsilon}{2}$  existuje bod  $x_{n_0}$  tak, že  $x_{n_0} \in U(x, \frac{\varepsilon}{2})$ .

Bod  $x_{n_0}$  je hromadný bod množiny  $H$ . Z definície hromadného bodu plynie, že  $U(x_{n_0}, \frac{\varepsilon}{2})$  obsahuje nekonečne mnoho bodov z množiny  $H$ .

Keďže platí

$$U(x_{n_0}, \frac{\varepsilon}{2}) \subset U(x, \varepsilon),$$

taktiež množina  $U(x, \varepsilon)$  musí obsahovať nekonečne mnoho bodov množiny  $H$ . Vzhľadom k tomu, že  $\varepsilon > 0$  je zvolené ľubovoľne, v každom okolí bodu  $x$  leží nekonečne mnoho bodov množiny  $H$ . Preto je  $x$  hromadný bod  $H$ , tzn.  $x \in \tilde{H}$ .

- **otvorenosť**

Pokiaľ  $z_0 \in \tilde{H}$  a  $U_1(z_0) \subset \Omega$ , potom podľa vety 2.33 pre všetky  $z \in U_1(z_0)$  platí

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

### 3 VLASTNOSTI KOREŇOV KOMPLEXNÝCH FUNKCIÍ

Ukážeme, že  $h \equiv 0$  na  $U_1(z_0)$ .

Sporom predpokladajme, že  $h \not\equiv 0$  na  $U_1(z_0)$ . Potom musí existovať  $p \in \mathbb{N}$  tak, že  $a_0, a_1, \dots, a_{p-1} = 0$  a  $a_p \neq 0$  ( $z_0$  bude  $p$ - násobný koreň funkcie  $h$ ), tzn.

$$h(z) = \sum_{n=p}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = (z - z_0)^p \varphi(z),$$

kde

$$\varphi(z) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{n=p}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n-p}$$

je holomorfná a nenulová v bode  $z_0$ . Odtiaľ plynie, že existuje  $U_2(z_0)$  také, že  $\varphi(z) \neq 0$  pre všetky  $z \in U_2(z_0)$ . Preto pre všetky  $z \in U_2(z_0) \setminus \{z_0\}$  je  $h$  nenulová.

To je spor, pretože  $z_0 \in \tilde{H}$ . Preto  $h(z) = 0$  pre všetky  $z \in U_1(z_0)$ . Z toho vyplýva, že  $U_1(z_0) \subset \tilde{H}$ .

Označme

$$A \stackrel{\text{ozn.}}{=} \tilde{H},$$

$$B \stackrel{\text{ozn.}}{=} \Omega \setminus \tilde{H}.$$

Ked'že  $\Omega = A \cup B$  je oblasť (teda súvislá množina), množiny  $A$  a  $B$  nemôžu byť oddelené a zároveň neprázdne.

Dokážeme, že  $A, B$  sú oddelené množiny, tzn.  $\overline{A} \cap B = \emptyset$  a zároveň  $A \cap \overline{B} = \emptyset$ .

- $\overline{A} \cap B = \emptyset$

Sporom predpokladajme, že existuje  $x$  tak, že  $x \in \overline{A}$  a zároveň  $x \in B$ . Pokiaľ  $x \in \overline{A}$ , potom musí existovať postupnosť  $(x_n) \subset A = \tilde{H}$  tak, že  $x_n \rightarrow x \in B \subset \Omega$ . Pretože množina  $\tilde{H}$  je uzatvorená v  $\Omega$ , platí že  $x \in \tilde{H}$ . To je spor s tým, že  $x \in B = \Omega \setminus \tilde{H}$ . Preto  $\overline{A} \cap B = \emptyset$ .

- $A \cap \overline{B} = \emptyset$

Taktiež sporom predpokladajme, že existuje  $x$  tak, že  $x \in A$  a zároveň  $x \in \overline{B}$ . Pokiaľ  $x \in A = \tilde{H}$ , potom pretože  $\tilde{H}$  je otvorená, existuje  $U(x)$ , také že  $U(x) \subset \tilde{H}$ . Pokiaľ  $x \in \overline{B}$ , potom musí existovať postupnosť  $(x_n) \subset B = \Omega \setminus \tilde{H}$  taká, že  $x_n \rightarrow x$ . To je spor s tým, že  $U(x) \subset \tilde{H}$ . Preto  $A \cap \overline{B} = \emptyset$ , teda množiny  $A, B$  sú oddelené.

Ked'že  $A = \tilde{H}$  je neprázdna, potom musí platiť  $B = \Omega \setminus \tilde{H} = \emptyset$ . To však znamená, že  $\Omega = \tilde{H}$ . Platí

$$\Omega = \tilde{H} \subset H \subset \Omega.$$

Teda,  $\Omega = H$ , čím je veta dokázaná. □

### 3 VLASTNOSTI KOREŇOV KOMPLEXNÝCH FUNKCIÍ

**Veta 3.2.** *Nech  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  je holomorfná v oblasti  $\Omega$  a  $f \not\equiv 0$  v  $\Omega$ . Nech existuje  $z_0 \in \Omega$  tak, že  $f(z_0) = 0$ . Potom existuje  $r \in \mathbb{R}^+$  také, že*

$$(\forall z \in \overline{U(z_0, r)} \setminus \{z_0\}) : f(z) \neq 0.$$

*Dôkaz.* Bod  $z_0$  nie hromadným bodom množiny  $\{z \in \Omega : f(z) = 0\}$ , pretože pokiaľ by to hromadný bod bol, z vety o jednoznačnosti 3.1 by funkcia  $f$  bola nulová na  $\Omega$ . Preto musí existovať  $d \in \mathbb{R}^+$  také, že

$$(\forall z \in U(z_0, d) \setminus \{z_0\}) : f(z) \neq 0.$$

Pokiaľ zvolíme  $r \in (0, d)$  dostaneme tvrdenie vety. □

**Veta 3.3.** *Nech  $\Omega$  je oblasť,  $f$  je holomorfná na  $\Omega$ ,  $K \subset \Omega$  je kompaktná množina a nech  $f \not\equiv 0$  na  $\Omega$ . Potom má funkcia  $f$  na množine  $K$  konečný počet koreňov.*

*Dôkaz.* Sporom predpokladajme, že množina

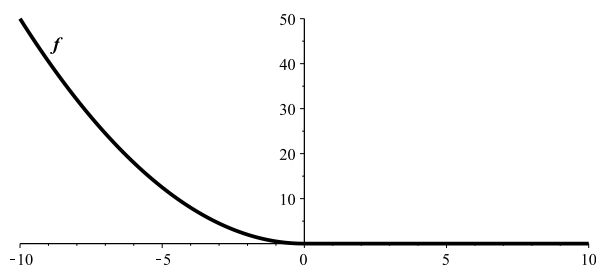
$$\{z \in K : f(z) = 0\} \stackrel{\text{ozn.}}{=} \tilde{K}$$

je nekonečná. Potom množina  $\tilde{K}$  má hromadný bod v množine  $K \subset \Omega$  (každá nekonečná podmnožina kompaktu  $K$  má v  $K$  hromadný bod). Z vety 3.1 plynie, že  $f(z) = 0$  pre všetky  $z \in \Omega$ , čo je spor, pretože  $f \not\equiv 0$  na  $\Omega$ . Množina  $\tilde{K}$  musí byť preto konečná. □

**Poznámka 3.4.** V reálnom obore predchádzajúca veta 3.3 neplatí. Napríklad pre funkciu  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definovanú predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & x \leq 0; \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

(vid' obr. 3.1), existuje  $f'(x)$  na celom  $\mathbb{R}$ ,  $f \not\equiv 0$  na  $\mathbb{R}$  a na kompakte  $\langle 2, 3 \rangle \subset \mathbb{R}$  má nekonečný počet koreňov.



Obr. 3.1: Funkcia  $f$ , ktorá ma na kompakte nekonečný počet koreňov

### 3 VLASTNOSTI KOREŇOV KOMPLEXNÝCH FUNKCIÍ

#### Veta 3.5. (Princíp argumentu)

Nech  $\Omega \subset \mathbb{C}$  je jednoducho súvislá oblasť,  $\gamma$  je jednoduchá uzatvorená kladne orientovaná krivka ležiaca v  $\Omega$  a  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  je holomorfná v  $\Omega$  s výnimkou konečne mnoho pólov. Nech  $s_1, \dots, s_m, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  sú všetky navzájom rôzne body ležiace v  $\text{int } \gamma$ , v ktorých má funkcia  $f$  pól a  $\beta_1, \dots, \beta_m$  sú príslušné násobnosti k týmto póloom. Nech  $z_1, \dots, z_n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  sú všetky navzájom rôzne korene funkcie  $f$  ležiace v  $\text{int } \gamma$  a  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sú ich príslušné násobnosti. Ďalej nech pre všetky body  $z \in \langle \gamma \rangle$  platí, že funkcia  $f$  je nenulová v týchto bodoch a ani nemá v týchto bodoch pól.

Potom platí:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^n \alpha_i - \sum_{i=1}^m \beta_i. \quad (3.1)$$

(Výraz na pravej strane rovnosti (3.1) znamená počet koreňov mínus počet pólov vrátane násobností funkcie  $f$  v  $\text{int } \gamma$ .)

Dôkaz. Keďže pre  $i \in \{1, \dots, n\}$  je  $\alpha_i$  násobnosť koreňa  $z_i$  a funkcia  $f$  je holomorfná v bode  $z_i$ , existuje  $U(z_i)$  také, že pre všetky  $z \in U(z_i)$  platí:

$$f(z) = \sum_{n=\alpha_i}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_i)}{n!} (z - z_i)^n = (z - z_i)^{\alpha_i} \varphi(z), \quad (3.2)$$

kde

$$\varphi(z) := \sum_{n=\alpha_i}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_i)}{n!} (z - z_i)^{n-\alpha_i}$$

je nenulová a holomorfná na okolí  $U(z_i)$ .

Keďže pre  $i \in \{1, \dots, m\}$  je  $\beta_i$  násobnosť pólu  $s_i$ , existuje  $P(s_i)$  také, že pre všetky  $z \in P(s_i)$  platí:

$$f(z) = \sum_{n=-\beta_i}^{\infty} a_n (z - s_i)^n = \frac{1}{(z - s_i)^{\beta_i}} \theta(z), \quad (3.3)$$

kde

$$\theta(z) := \sum_{n=-\beta_i}^{\infty} a_n (z - s_i)^{n+\beta_i}$$

je nenulová a holomorfná na okolí  $U(s_i)$ .

Keďže  $z_1, \dots, z_n$  a  $s_1, \dots, s_m$  sú izolované singularities funkcie  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  a jediné body v  $\text{int } \gamma$  v ktorých nie je funkcia  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  holomorfná, podľa vety 2.42 platí:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} 2\pi i \left( \sum_{i=1}^n \text{res}_{z=z_i} \left( \frac{f'(z)}{f(z)} \right) + \sum_{i=1}^m \text{res}_{z=s_i} \left( \frac{f'(z)}{f(z)} \right) \right).$$

Pre funkciu  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  na  $P(z_i)$  po dosadení (3.2) platí:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\alpha_i (z - z_i)^{\alpha_i-1} \varphi(z) + (z - z_i)^{\alpha_i} \varphi'(z)}{(z - z_i)^{\alpha_i} \varphi(z)} = \frac{\alpha_i}{z - z_i} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)},$$

### 3 VLASTNOSTI KOREŇOV KOMPLEXNÝCH FUNKCIÍ

z čoho plyne, že

$$\lim_{z \rightarrow z_i} \left( (z - z_i) \frac{f'(z)}{f(z)} \right) = \alpha_i \neq 0,$$

a preto podľa 2.37 (ii) je bod  $z_i$  jednoduchý pól funkcie  $\frac{f'(z)}{f(z)}$ .

Pre jednoduchý pól  $z_i$  funkcie  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  podľa 2.41 platí

$$\operatorname{res}_{z=z_i} \left( \frac{f'(z)}{f(z)} \right) = \lim_{z \rightarrow z_i} \left( \frac{f'(z)}{f(z)} (z - z_i) \right) = \alpha_i.$$

Pre funkciu  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  na  $P(s_i)$  po dosadení (3.3) platí:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-\beta_i(z - s_i)^{-\beta_i-1}\theta(z) + (z - s_i)^{-\beta_i}\theta'(z)}{(z - s_i)^{-\beta_i}\theta(z)} = \frac{-\beta_i}{z - s_i} + \frac{\theta'(z)}{\theta(z)}.$$

Bod  $s_i$  je jednoduchý pól funkcie  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  a platí

$$\operatorname{res}_{z=s_i} \left( \frac{f'(z)}{f(z)} \right) = \lim_{z \rightarrow s_i} \left( \frac{f'(z)}{f(z)} (z - s_i) \right) = -\beta_i.$$

Tým sme dokázali, že

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^n \alpha_i - \sum_{i=1}^m \beta_i.$$

□

**Veta 3.6.** *Nech  $\Omega \subset \mathbb{C}$  je jednoducho súvislá oblasť,  $\gamma$  je jednoduchá uzatvorená kladne orientovaná krivka ležiaca v  $\Omega$  a  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  je holomorfná v  $\Omega$  taká, že  $f(z) \neq 0$  pre všetky  $z \in \langle \gamma \rangle$ . Nech  $z_1, \dots, z_n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  sú všetky navzájom rôzne korene funkcie  $f$  ležiace v  $\operatorname{int} \gamma$  (tzn.  $f(z_i) = 0$ , kde  $i \in \{1, \dots, n\}$ ) a  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sú ich príslušné násobnosti. Ďalej nech  $\psi, \phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  sú polynómy. Potom platí*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \psi(z)\phi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^n \alpha_i \psi(z_i)\phi(z_i).$$

*Dôkaz.* Body  $z_1, \dots, z_n$  sú izolované singularity funkcie  $\psi(z)\phi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}$  a jediné body v  $\operatorname{int} \gamma$  v ktorých nie je funkcia  $\psi(z)\phi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}$  holomorfná, podľa vety 2.42 platí:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \psi(z)\phi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} 2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{res}_{z=z_i} \left( \psi(z)\phi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} \right).$$

Keďže  $z_i$  je jednoduchý pól funkcie  $\frac{f'(z)}{f(z)}$ , platí (viď dôkaz vety 3.5)

$$\operatorname{res}_{z=z_i} \left( \frac{f'(z)}{f(z)} \right) = \alpha_i.$$

### 3 VLASTNOSTI KOREŇOV KOMPLEXNÝCH FUNKCIÍ

Funkcia  $\psi(z)\phi(z)$  je holomorfná v bode  $z_i$ , preto podľa 2.40 (i) platí

$$\operatorname{res}_{z=z_i} \left( \psi(z)\phi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} \right) = \psi(z_i)\phi(z_i) \operatorname{res}_{z=z_i} \left( \frac{f'(z)}{f(z)} \right) = \psi(z_i)\phi(z_i)\alpha_i.$$

Tým sme dokázali, že

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \psi(z)\phi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^n \alpha_i \psi(z_i)\phi(z_i).$$

□

**Poznámka 3.7.** Pre  $\psi(z) = 1$  a  $\phi(z) = 1$  z vety 3.6 vyplýva, že počet koreňov (vrátane ich násobností) holomorfnéj funkcie  $f$ , ktoré ležia vo vnútri krivky  $\gamma$  (ktorá má predpoklady z vety 3.6) sa dá vyjadriť ako

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

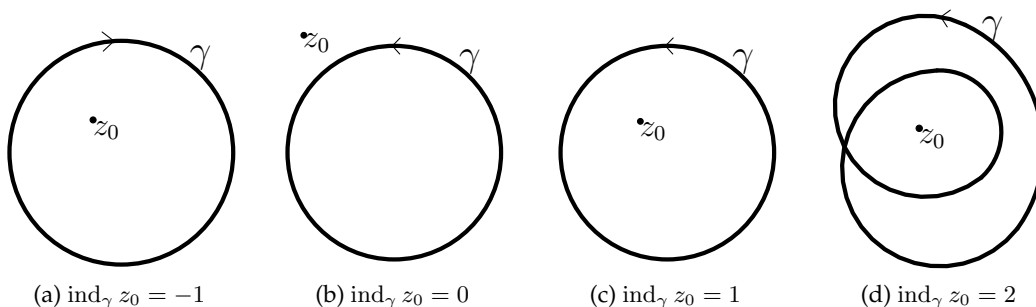
**Definícia 3.8. (Index bodu ku krivke)**

Nech  $\gamma$  je uzatvorená krivka v  $\mathbb{C}$  a bod  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \langle \gamma \rangle$ . Číslo

$$\operatorname{ind}_{\gamma} z_0 \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz$$

sa nazýva **index bodu**  $z_0$  ku krivke  $\gamma$ .

Index bodu je definovaný pre každý bod, ktorý neleží na  $\langle \gamma \rangle$  a udáva koľkokrát krivka  $\gamma$  „obehne“ v kladnom zmysle bod  $z_0$ .



Obr. 3.2: Geometrický význam indexu bodu ku krivke

Všimnime si, ako súvisí index bodu ku krivke s vetou 3.5. Pokiaľ sú splnené predpoklady vety 3.5, potom

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = K - P,$$

### 3 VLASTNOSTI KOREŇOV KOMPLEXNÝCH FUNKCIÍ

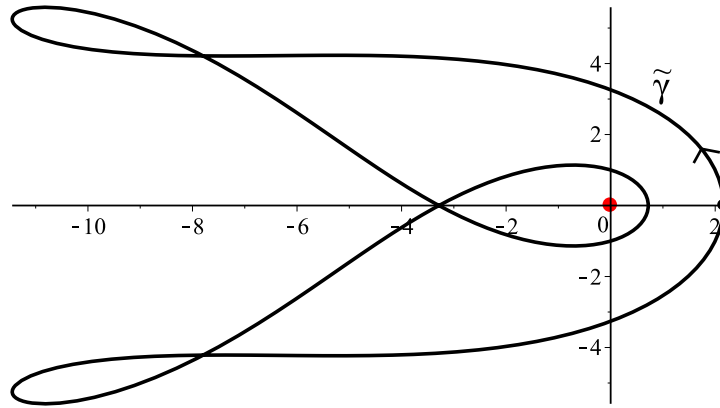
kde  $K$  je počet koreňov vrátane násobností a  $P$  je počet pólov vrátane násobností funkcie  $f$ , ležiacich vo vnútri krivky  $\gamma : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ . Z využitím definície krivkového integrálu 2.28 a definície indexu bodu ku krivke 3.8 platí:

$$K - P = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} \gamma'(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\tilde{\gamma}'(t)}{\tilde{\gamma}(t)} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{z} dz = \text{ind}_{\tilde{\gamma}} 0,$$

kde  $\tilde{\gamma} : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\tilde{\gamma}(t) \stackrel{\text{def.}}{=} f(\gamma(t))$ .

Vyššie definovaná krivka  $\tilde{\gamma}$  „obehne“ v kladnom zmysle bod 0 ( $K - P$ )-krát.

**Príklad 3.9.** Nech  $f(z) = \frac{(z-1)^2(z+1)^3z}{(z^2+1)^2}$  a  $\gamma(t) = 2e^{2\pi it}$ ,  $t \in \langle 0, 1 \rangle$ . Potom  $f$  má v int  $\gamma$  6 koreňov (2-násobný koreň 1, 3-násobný koreň  $-1$  a jednonásobný koreň 0) a 4 póly (2-násobný pól  $i$  a 2-násobný pól  $-i$ ). Preto krivka  $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$  bod 0 obehne 2-krát ako je vidieť na obrázku 3.3.



Obr. 3.3: Geometrický význam princípu argumentu

#### Veta 3.10. (Rouchèova veta)

Nech  $\Omega \subset \mathbb{C}$  je jednoducho súvislá oblasť,  $\gamma$  je jednoduchá uzatvorená krivka v  $\Omega$  a funkcie  $f, g$  sú holomorfné v  $\Omega$ . Nech platí

$$|f(z)| > |g(z)| \quad \text{pre všetky } z \in \langle \gamma \rangle.$$

Potom funkcia  $f + g$  a funkcia  $f$  majú v int  $\gamma$  rovnaký počet koreňov vrátane násobností.

*Dôkaz.* Bez újmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že  $\gamma$  je navyiac kladne orientovaná. Keďže funkcie  $f, g$  sú holomorfné na  $\Omega$  (derivácie  $f', g'$  sú tiež na  $\Omega$  holomorfné), potom funkcie  $|f(z)| - |g(z)|$  a  $|f(z)g'(z) - f'(z)g(z)|$  sú spojité na  $\langle \gamma \rangle$ . Keďže  $\langle \gamma \rangle$  je kompaktná množina, potom musí existovať

$$\begin{aligned} \min_{z \in \langle \gamma \rangle} (|f(z)| - |g(z)|) &\stackrel{\text{ozn.}}{=} m, \\ \max_{z \in \langle \gamma \rangle} (|f(z)g'(z) - f'(z)g(z)|) &\stackrel{\text{ozn.}}{=} M. \end{aligned} \tag{3.4}$$

### 3 VLASTNOSTI KOREŇOV KOMPLEXNÝCH FUNKCIÍ

Z predpokladov vety plyní, že  $m > 0$ .

Pre  $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$  definujeme

$$f_\lambda(z) \stackrel{\text{def.}}{=} f(z) + \lambda g(z).$$

Ked'že pre  $z \in \langle \gamma \rangle$  platí:

$$|f(z) + \lambda g(z)| \geq |f(z)| - \lambda |g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| \geq m > 0, \quad (3.5)$$

funkcia  $f_\lambda$  je nenulová na  $\langle \gamma \rangle$ .

Definujeme  $K : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  predpisom

$$K(\lambda) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'_\lambda(z)}{f_\lambda(z)} dz.$$

$K$  je vzhľadom k (3.5) definovaná korektne. Ukážeme, že  $K$  je spojitá na  $\langle 0, 1 \rangle$ .

Z využitím existencie  $m$  a  $M$  (vid' (3.4)), z využitím nerovnosti (3.5) a vety 2.29, pre všetky  $\lambda, \mu \in \langle 0, 1 \rangle$  platí

$$\begin{aligned} |K(\lambda) - K(\mu)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{(\lambda - \mu)(f(z)g'(z) - f'(z)g(z))}{(f(z) + \lambda g(z))(f(z) + \mu g(z))} dz \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \underbrace{\text{dĺžka}(\gamma)}_{\text{konst.}} \max_{z \in \langle \gamma \rangle} \frac{|\lambda - \mu| |f(z)g'(z) - f'(z)g(z)|}{|f(z) + \lambda g(z)| |f(z) + \mu g(z)|} \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \underbrace{\text{dĺžka}(\gamma)}_{\text{konst.}} |\lambda - \mu| \underbrace{\frac{M}{m^2}}_{\text{konst.}} = \text{konst.} |\lambda - \mu|. \end{aligned}$$

Pokiaľ  $|\lambda_n - \lambda_0| \rightarrow 0$ , potom  $|K(\lambda_n) - K(\lambda_0)| \leq \text{konst.} |\lambda_n - \lambda_0| \rightarrow 0$ . To znamená, že  $K$  je spojitá na  $\langle 0, 1 \rangle$ . ( $K$  je dokonca na  $\langle 0, 1 \rangle$  lipschitzovsky spojitá.)

$K$  zároveň nadobúda na intervale  $\langle 0, 1 \rangle$  len celočíselných hodnôt (jej hodnoty sú počty koreňov funkcie  $f_\lambda$  vo vnútri krivky  $\gamma$ , vid' poznámku 3.7). Musí byť teda na intervale  $\langle 0, 1 \rangle$  konštantná. Preto  $K(0) = K(1)$ , čo znamená, že počet koreňov vo vnútri krivky  $\gamma$  funkcie  $f_0 = f$  je rovnaký ako počet koreňov funkcie  $f_1 = f + g$ .  $\square$

**Veta 3.11.** *Nech  $\Omega$  je jednoducho súvislá oblasť,  $\gamma$  je jednoduchá uzatvorená krivka ležiaca v  $\Omega$ , funkcia  $f$  je holomorfná v  $\Omega$  a bod  $z_0 \in \text{int } \gamma$ . Nech platí*

$$\min_{z \in \langle \gamma \rangle} |f(z)| > |f(z_0)|. \quad (3.6)$$

Potom existuje  $z \in \text{int } \gamma$  tak, že  $f(z) = 0$ .

*Dôkaz.* Pre všetky  $z \in \langle \gamma \rangle$  platí

$$|f(z)| \geq \min_{z \in \langle \gamma \rangle} |f(z)| > |f(z_0)|.$$



### 3 VLASTNOSTI KOREŇOV KOMPLEXNÝCH FUNKCIÍ

Definujme konštantnú funkciu  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  predpisom

$$g(z) \stackrel{\text{def.}}{=} -f(z_0).$$

Potom pre všetky  $z \in \langle \gamma \rangle$  platí

$$|f(z)| > |g(z)|.$$

Z vety 3.10 plynie, že funkcie  $f$  a  $f + g = f - f(z_0)$  majú v  $\text{int } \gamma$  rovnaký počet koreňov. Keďže  $f - f(z_0)$  má v  $\text{int } \gamma$  koreň  $z_0$ , funkcia  $f$  musí mať v  $\text{int } \gamma$  tiež koreň.  $\square$

**Príklad 3.12.** Nech  $\gamma(t) = e^{2\pi it}$  pre  $t \in \langle 0, 1 \rangle$ ,  $z_0 = 0$  a  $f(z) = z^5 + 4z + 1 + i$ . Potom  $z_0 \in \text{int } \gamma$  a pre všetky  $z \in \langle \gamma \rangle = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  platí

$$|f(z)| = |z^5 + 4z + 1 + i| \geq |4z| - |z^5 + 1 + i| \geq 4|z| - |z|^5 - |1 + i| = 3 - \sqrt{2} > \sqrt{2} = |f(0)|,$$

čím je splnená nerovnosť (3.6). Musí preto existovať koreň  $f$  ležiaci v  $\text{int } \gamma$ . Funkcia  $f$  má koreň v bode  $z \doteq -0.250996 - 0.250996i \in \text{int } \gamma$ .

**Veta 3.13. (O otvorenom zobrazení holomorfnéj funkcie)**

Nech funkcia  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  je nekonštantná a holomorfná v oblasti  $\Omega \subset \mathbb{C}$ . Potom  $f$  je otvorené zobrazenie z  $\Omega$  do  $\mathbb{C}$ . Tzn. pokiaľ množina  $G \subset \Omega$  je otvorená, potom množina  $f(G) = \{f(z) : z \in G\}$  je taktiež otvorená.

*Dôkaz.* Pokiaľ by mala byť množina  $f(G)$  otvorená, potom musí pre každé  $w_0 \in f(G)$  existovať  $\delta \in \mathbb{R}^+$  tak, že  $U(w_0, \delta) \subset f(G)$ .

Ak  $w_0 \in f(G)$ , potom existuje bod  $z_0 \in G$  taký, že  $f(z_0) = w_0$ . Z vety 3.2 (aplikujeme ju na funkciu  $f - w_0$ ) a otvorenosti  $G$  plynie, že existuje  $r \in \mathbb{R}^+$  tak, že  $\overline{U(z_0, r)} \subset G$  a navyše

$$(\forall z \in \overline{U(z_0, r)} \setminus \{z_0\}) : f(z) \neq w_0. \quad (3.7)$$

Označme množinu

$$M := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}.$$

Zrejme platí (vd'aka (3.7))

$$\delta \stackrel{\text{def.}}{=} \min_{z \in M} |f(z) - w_0| > 0.$$

Zvoľme  $u \in U(w_0, \delta)$  ľubovoľne. Potom pre všetky  $z \in M$  platí

$$|w_0 - u| < \delta = \min_{z \in M} |f(z) - w_0| \leq |f(z) - w_0|.$$

Z vety 3.10 plynie, že funkcie  $f - w_0$  a  $f - w_0 + w_0 - u = f - u$  majú na množine  $U(z_0, r)$  rovnaký počet koreňov. Keďže  $f - w_0 = f - f(z_0)$  má koreň v  $z_0$ , funkcia  $f - u$  bude mať tiež koreň v bode  $\tilde{z} \in U(z_0, r) \subset G$ . To ale znamená, že  $f(\tilde{z}) = u$ , odkiaľ  $u \in f(G)$ .  $\square$

**Poznámka 3.14.** V reálnom obore predchádzajúca veta neplatí. Napríklad pre funkciu  $f(x) = \sin(x)$ , existuje  $f'(x)$  na celom  $\mathbb{R}$  a taktiež je  $f$  nekonštantná na  $\mathbb{R}$ . Množina  $(0, 2\pi) \subset \mathbb{R}$  je otvorená, pričom obraz  $f((0, 2\pi)) = \langle -1, 1 \rangle$  je uzatvorená množina.

### 3 VLASTNOSTI KOREŇOV KOMPLEXNÝCH FUNKCIÍ

**Veta 3.15. (Princíp maxima modulu)**

Nech  $\Omega \subset \mathbb{C}$  je oblasť a  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  je holomorfná a nekonštantná v  $\Omega$ . Potom funkcia  $|f|$  nenadobúda v  $\Omega$  lokálneho maxima.

*Dôkaz.* Sporom budeme predpokladať, že  $|f|$  nadobúda v  $\Omega$  lokálneho maxima v bode  $c \in \Omega$ . Potom musí existovať  $U(c) \subset \Omega$  tak, že

$$|f(z)| \leq |f(c)| \text{ pre } z \in U(c).$$

Potom

$$f(U(c)) \subset \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq |f(c)|\} =: W.$$

Dokážeme, že množina  $f(U(c))$  nie je otvorená a to tak, že dokážeme, že pre  $f(c) \in f(U(c))$  a ľubovoľné  $\delta \in \mathbb{R}^+$ , množina  $U(f(c), \delta)$  nie je podmnožinou množiny  $f(U(c))$ .

Zvoľme  $\delta > 0$  ľubovoľne a zvoľme bod  $x$

$$x = \begin{cases} f(c) + \frac{\delta}{2}, & \text{pokiaľ } \operatorname{Re} f(c) \geq 0; \\ f(c) - \frac{\delta}{2}, & \text{pokiaľ } \operatorname{Re} f(c) < 0. \end{cases}$$

Bod  $x$  určite patrí do množiny  $U(f(c), \delta)$ , ale nepatrí do množiny  $W$  ( $|x| > |f(c)|$ ) a teda ani do množiny  $f(U(c))$  z čoho plynie, že  $f(U(c))$  nie je otvorená. Podľa vety 3.13 musí byť funkcia  $f$  konštantná v  $\Omega$ , čo je spor z predpokladmi vety.  $\square$

**Poznámka 3.16.** Veta 3.15 v reálnom obore neplatí. Majme funkciu  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definovanú predpisom  $f(x) := \sin x$ . Pre všetky  $x \in (0, \pi)$  existuje  $f'(x)$  a  $f$  je nekonštantná na  $(0, \pi)$ . V bode  $x = \frac{\pi}{2} \in (0, \pi)$  má  $|f|$  lokálne maximum.

**Poznámka 3.17.** Pokiaľ sú splnené predpoklady vety 3.15,  $f$  nenadobúda v  $\Omega$  ani globálneho maxima.

**Veta 3.18.** Nech  $\Omega \subset \mathbb{C}$  je oblasť a  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  je holomorfná a nekonštantná v  $\Omega$ . Potom funkcia  $\operatorname{Re} f$  (resp.  $\operatorname{Im} f$ ) nenadobúda v  $\Omega$  lokálneho maxima.

*Dôkaz.* Definujme  $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  predpisom

$$h(z) = \operatorname{Re} f(z).$$

$$(\text{resp. } h(z) = \operatorname{Im} f(z)).$$

Sporom budeme predpokladať, že  $h$  nadobúda v  $\Omega$  lokálneho maxima v bode  $c \in \Omega$ . Potom musí existovať  $U(c) \subset \Omega$  tak, že

$$h(z) \leq h(c) \text{ pre } z \in U(c).$$

Potom

$$f(U(c)) \subset \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w \leq h(c)\} =: W.$$

$$(\text{resp. } f(U(c)) \subset \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w \leq h(c)\} =: W.)$$

### 3 VLASTNOSTI KOREŇOV KOMPLEXNÝCH FUNKCIÍ

Dokážeme, že množina  $f(U(c))$  nie je otvorená a to tak, že dokážeme, že pre  $f(c) \in f(U(c))$  a ľubovoľné  $\delta \in \mathbb{R}^+$  množina  $U(f(c), \delta)$  nie je podmnožinou množiny  $f(U(c))$ .

Zvoľme  $\delta > 0$  ľubovoľne a zvoľme bod  $x = f(c) + \frac{\delta}{2}$ . (resp.  $x = f(c) + \frac{\delta}{2}i$ .)

Bod  $x$  určite patrí do množiny  $U(f(c), \delta)$ , ale nepatrí do množiny  $W$  a teda ani do množiny  $f(U(c))$  z čoho plynie, že  $f(U(c))$  nie je otvorená. Podľa vety 3.13 musí byť funkcia  $f$  konštantná v  $\Omega$ , čo je spor z predpokladmi vety.  $\square$

**Poznámka 3.19.** Dá sa ukázať, že pokiaľ sú splnené predpoklady vety 3.18, funkcia  $\operatorname{Re} f$  (resp.  $\operatorname{Im} f$ ) nenadobúda v  $\Omega$  ani lokálneho minima (stačí aplikovať tvrdenie vety 3.18 na funkciu  $-f$ ).

#### Veta 3.20. (O lokálnej inverzii)

Nech  $f$  je holomorfná v oblasti  $\Omega \subset \mathbb{C}$  a nech existuje  $z_0 \in \Omega$  tak, že  $f'(z_0) \neq 0$ . Potom existuje  $\varepsilon > 0$  tak, že  $f$  je prostá na  $U(z_0, \varepsilon)$ .

*Dôkaz.* Keďže funkcia  $f - f(z_0)$  je holomorfná v  $\Omega$ , nulová v bode  $z_0$  a kôli nenulovej derivácii funkcie  $f$  v bode  $z_0$  je  $f - f(z_0) \not\equiv 0$  na  $\Omega$ , z vety 3.2 a z otvorenosti  $\Omega$  plynie, že existuje  $r \in \mathbb{R}^+$  tak, že  $\overline{U(z_0, r)} \subset \Omega$  a

$$(\forall z \in \overline{U(z_0, r)} \setminus \{z_0\}) : f(z) \neq f(z_0). \quad (3.8)$$

Označme množinu

$$M := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}.$$

Zrejme platí (vd'aka (3.8))

$$\delta := \min_{z \in M} |f(z) - f(z_0)| > 0.$$

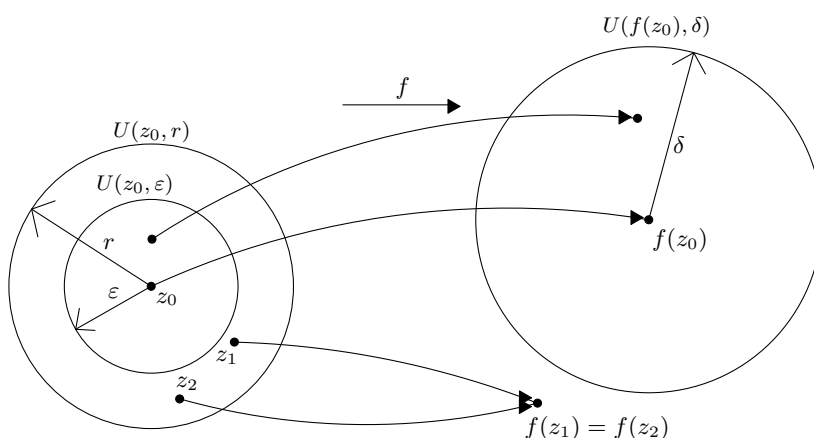
Zvoľme  $u \in U(f(z_0), \delta)$  ľubovoľne. Potom pre všetky  $z \in M$  platí

$$|f(z_0) - u| < \delta = \min_{z \in M} |f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f(z_0)|.$$

Z vety 3.10 plynie, že funkcie  $f - f(z_0)$  a  $f - f(z_0) + f(z_0) - u = f - u$  majú na množine  $U(z_0, r)$  rovnaký počet koreňov. Keďže  $f - f(z_0)$  má jednonásobný koreň v  $z_0$  (násobnosť koreňa  $z_0$  plynie z predpokladu, že  $f'(z_0) \neq 0$ ) a zároveň funkcia  $f - f(z_0)$  nemá v  $U(z_0, r)$  žiadne iné korene (vid' (3.8)), funkcia  $f - u$  bude mať v  $U(z_0, r)$  práve jediný koreň. Teda

$$\left( \forall u \in U(f(z_0), \delta) \right) \left( \exists! z \in U(z_0, r) : f(z) = u \right). \quad (3.9)$$

To ešte ale neznamená, že  $f$  je prostá na  $U(z_0, r)$ . Môže nastať situácia, že pre  $z_1, z_2 \in U(z_0, r)$ ,  $z_1 \neq z_2$  je  $f(z_1) = f(z_2) \notin U(f(z_0), \delta)$ , ako je vidieť na obrázku 3.4.



Obr. 3.4: Dôkaz vety 3.20, funkcia  $f$  nie je prostá na  $U(z_0, r)$

Zo spojitosti funkcie  $f$  v bode  $z_0$  plynie, že existuje  $\varepsilon > 0$  také, že  $U(z_0, \varepsilon) \subset U(z_0, r)$  a navyše

$$(\forall u \in U(z_0, \varepsilon)) : f(u) \in U(f(z_0), \delta). \quad (3.10)$$

Z (3.9) a (3.10) už plynie, že  $f$  je na  $U(z_0, \varepsilon)$  prostá.  $\square$

**Poznámka 3.21.** V reálnom obore predchádzajúca veta neplatí. Majme funkciu  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definovanú predpisom

$$f(x) := \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Potom

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 + 2x \sin \frac{1}{x} = 1 \neq 0$$

a  $f'(x)$  existuje pre všetky  $x \in \mathbb{R}$ .

Nech  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  je ľubovoľný interval, tak že  $0 \in (a, b)$  a zvolíme  $k \in \mathbb{N}$  tak dostatočne veľké, že  $\frac{1}{2k\pi}, \frac{1}{(2k+1)\pi} \in (a, b)$ .

Keďže  $f'(\frac{1}{(2k+1)\pi}) = 3$  a  $f'(\frac{1}{2k\pi}) = -1$ , potom musí existovať  $\varepsilon \in (\frac{1}{(2k+1)\pi}, \frac{1}{2k\pi})$  tak, že

$$f(\varepsilon) = \max_{x \in \langle \frac{1}{(2k+1)\pi}, \frac{1}{2k\pi} \rangle} f(x).$$

Zrejme  $f(\frac{1}{(2k+1)\pi}) = \frac{1}{(2k+1)\pi}$  a  $f(\frac{1}{2k\pi}) = \frac{1}{2k\pi}$ . Preto zo spojitosti  $f$  musí existovať  $\delta \in (\frac{1}{(2k+1)\pi}, \varepsilon)$  tak, že  $f(\delta) = f(\frac{1}{2k\pi}) = \frac{1}{2k\pi}$ .

Pre  $f$  teda platí, že  $f'(0) \neq 0$  a  $f$  nie je prostá na žiadnom intervale  $(a, b)$  takom, že  $0 \in (a, b)$ .

### 3 VLASTNOSTI KOREŇOV KOMPLEXNÝCH FUNKCIÍ

**Veta 3.22.** *Nech  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  je holomorfná a prostá v oblasti  $\Omega$ . Potom  $f'(z) \neq 0$  pre všetky  $z \in \Omega$ .*

*Dôkaz.* Sporom predpokladajme, že existuje  $z_0 \in \Omega$  taký, že  $f'(z_0) = 0$ .

Keďže funkcia  $f - f(z_0)$  je holomorfná v  $\Omega$ , nulová v bode  $z_0$  a  $f - f(z_0) \not\equiv 0$  na  $\Omega$  (plynie z toho, že  $f$  je na  $\Omega$  prostá), podľa vety 3.2 existuje  $r_1 \in \mathbb{R}^+$  tak, že  $\overline{U(z_0, r_1)} \subset \Omega$  a

$$(\forall z \in \overline{U(z_0, r_1)} \setminus \{z_0\}) : f(z) \neq f(z_0).$$

Funkcia  $f'$  je taktiež holomorfná v  $\Omega$ , nulová v  $z_0$  a  $f' \not\equiv 0$  na  $\Omega$  ( $f$  je prostá na  $\Omega$ ), preto podľa vety 3.2 existuje  $r_2 \in \mathbb{R}^+$  tak, že  $\overline{U(z_0, r_2)} \subset \Omega$  a

$$(\forall z \in \overline{U(z_0, r_2)} \setminus \{z_0\}) : f'(z) \neq 0.$$

Nech  $r = \min\{r_1, r_2\}$ . Potom

$$(\forall z \in \overline{U(z_0, r)} \setminus \{z_0\}) : [f(z) \neq f(z_0) \wedge f'(z) \neq 0]. \quad (3.11)$$

Označme množinu

$$M := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}.$$

Zrejme platí

$$\delta := \min_{z \in M} |f(z) - f(z_0)| > 0.$$

Zvoľme  $u \in P(f(z_0), \delta)$  ľubovoľne. Potom pre všetky  $z \in M$  platí

$$|f(z_0) - u| < \delta = \min_{z \in M} |f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f(z_0)|.$$

Z vety 3.10 plynie, že funkcie  $f - f(z_0)$  a  $f - f(z_0) + f(z_0) - u = f - u$  majú na množine  $U(z_0, r)$  rovnaký počet koreňov. Keďže  $f - f(z_0)$  má koreň v  $z_0$ , ktorého násobnosť je minimálne 2 (násobnosť koreňa  $z_0$  plynie z predpokladu, že  $f'(z_0) = 0$ ), funkcia  $f - u$  bude mať v  $U(z_0, r)$  minimálne 2 rôzne korene (pokiaľ má  $f - u$  v  $U(z_0, r)$  koreň, bude to vzhľadom k (3.11) jednonásobný koreň).

To znamená, že pokiaľ  $u \in P(f(z_0), \delta)$ , potom existuje  $z_1 \in U(z_0, r)$  tak, že  $f(z_1) = u$  a zároveň existuje  $z_2 \in U(z_0, r)$  tak, že  $z_2 \neq z_1$  a  $f(z_2) = u$ . To však znamená, že  $f$  nie je prostá v  $\Omega$ , čo je spor z predpokladom vety. Preto pre všetky  $z \in \Omega$  musí byť  $f'(z) \neq 0$ .  $\square$

**Poznámka 3.23.** V reálnom obore veta 3.22 neplatí. Napríklad funkcia  $f(x) = x^3$  je na  $\mathbb{R}$  prostá a pre všetky  $x \in \mathbb{R}$  existuje  $f'(x)$ . Ale neplatí, že pre všetky  $x \in \mathbb{R}$  je  $f'(x) \neq 0$  (v bode  $x_0 = 0$  je  $f'(x_0) = 0$ ).

## 4 Základná veta algebry

Na začiatku tejto kapitoly uveďme niektoré pomocné vety a lemmy, ktoré budú užitočné pri dôkazoch Základnej vety algebry.

### Veta 4.1. (Liouvillova)

Nech  $f$  je holomorfná a ohraničená na  $\mathbb{C}$  (existuje kladná reálna konštanta  $M$  tak, že pre všetky  $z \in \mathbb{C}$  je  $|f(z)| \leq M$ ). Potom je  $f$  konštantná na  $\mathbb{C}$ .

Dôkaz. Nech  $z_0 \in \mathbb{C}$  je ľubovoľné. Z vety 2.31 plyní, že pre každé  $\rho \in (0, +\infty)$  je

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz,$$

kde

$$\gamma(t) := z_0 + \rho e^{it}, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Potom z využitím vety 2.29 a z využitím ohraničenosti  $f$  (pre všetky  $z \in \mathbb{C}$  je  $|f(z)| \leq M$ ) platí

$$|f'(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{z \in \langle \gamma \rangle} \underbrace{\left| \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} \right|}_{\leq \frac{M}{\rho^2}} 2\pi \rho \leq \frac{M}{\rho} \rightarrow 0, \quad \text{pre } \rho \rightarrow \infty.$$

Preto  $f'(z_0) = 0$ . Pretože  $z_0$  bolo zvolené ľubovoľne, znamená to, že  $f$  je na  $\mathbb{C}$  konštantná.  $\square$

**Lemma 4.2.** Nech  $f$  je holomorfná v oblasti  $\Omega$ . Potom platí

$$\Delta(|f|^2) = 4|f'|^2.$$

Dôkaz. Položme  $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Potom

$$|f(x + iy)|^2 = u^2(x, y) + v^2(x, y).$$

Spočítame druhé parciálne derivácie  $|f|^2$ :

$$\frac{\partial |f|^2}{\partial x} = 2u \frac{\partial u}{\partial x} + 2v \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 |f|^2}{\partial x^2} = 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

podobne

$$\frac{\partial^2 |f|^2}{\partial y^2} = 2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Keďže  $f$  je na  $\Omega$  holomorfná, z využitím vety 2.22  $\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \right)$  platí

$$\Delta(|f|^2) = \frac{\partial^2 |f|^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 |f|^2}{\partial y^2} = 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2. \quad (4.1)$$

## 4 ZÁKLADNÁ VETA ALGEBRY

Z vety 2.21 platí

$$|f'|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

Dosadením do 4.1 dostaneme

$$\Delta(|f|^2) = 4|f'|^2.$$

□

**Lemma 4.3.** *Nech pre  $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  existuje  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  tak, že  $\frac{\partial^2 w(x_0, y_0)}{\partial x^2}$  a  $\frac{\partial^2 w(x_0, y_0)}{\partial y^2}$  existujú a zároveň nech platí*

$$\max_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} w(x, y) = w(x_0, y_0).$$

Potom platí

$$\Delta w(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 w(x_0, y_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x_0, y_0)}{\partial y^2} \leq 0.$$

*Dôkaz.* Funkcia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} w(x, y_0)$  nadobúda maxima v bode  $x_0$ . Preto  $\frac{\partial^2 w(x_0, y_0)}{\partial x^2} \leq 0$ .

Taktiež  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(y) \stackrel{\text{def.}}{=} w(x_0, y)$  nadobúda maxima v bode  $y_0$ . Preto  $\frac{\partial^2 w(x_0, y_0)}{\partial y^2} \leq 0$ , čím je lemma dokázaná. □

**Lemma 4.4.** *Každý polynóm stupňa  $n \in \mathbb{N}$  má v  $\mathbb{C}$  maximálne  $n$  rôznych koreňov.*

*Dôkaz.* Označme

$$p_n(z) \stackrel{\text{ozn.}}{=} a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0,$$

kde  $n \in \mathbb{N}, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}, a_n \neq 0$ .

Dôkaz vykonáme pomocou indukcie.

Pre  $n = 1$  je

$$p_1(z) = a_1 z + a_0,$$

z čoho plynie, že  $p_1$  má jediný koreň v bode  $z_0 = \frac{-a_0}{a_1}$ . Teda veta pre  $n = 1$  platí.

Prepokladajme, že polynóm stupňa  $n$  má maximálne  $n$  koreňov. Potom polynóm stupňa  $n + 1$ ,

$$p_{n+1}(z) = a_{n+1} z^{n+1} + a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$$

nemá žiadny koreň (čím je veta dokázaná) alebo má koreň v nejakom bode  $z_0$ . V tomto prípade pre polynóm  $p_{n+1}$  platí

$$p_{n+1}(z) = (z - z_0)q_n(z),$$

kde  $q_n$  je polynóm stupňa  $n$ .

Keďže predpokladáme, že  $q_n(z)$  má v  $\mathbb{C}$  maximálne  $n$  koreňov, polynóm  $p_{n+1}$  musí mať v  $\mathbb{C}$  maximálne  $n + 1$  koreňov. Tým je veta dokázaná. □

## 4 ZÁKLADNÁ VETA ALGEBRY

### Veta 4.5. (Základná veta algebry)

Každý polynóm kladného stupňa má v  $\mathbb{C}$  aspoň jeden koreň. Tzn. pre každú funkciu  $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definovanú predpisom

$$p(z) \stackrel{\text{def.}}{=} a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0,$$

kde  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ ,  $a_n \neq 0$ , existuje  $z \in \mathbb{C}$  tak, že  $p(z) = 0$ .

Dôkaz 1. Budeme predpokladať sporom, že  $p$  nemá v  $\mathbb{C}$  žiadny koreň.

Definujme  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  predpisom

$$f(z) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{p(z)}. \quad (4.2)$$

Funkcia  $f$  je holomorfná na  $\mathbb{C} \setminus P(\infty)$  ( $\forall z \in \mathbb{C} : f'(z) = -\frac{p'(z)}{p^2(z)}$ ). Keďže

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^n \left( a_n + a_{n-1} \frac{1}{z} + \dots + a_0 \frac{1}{z^n} \right)} = 0,$$

pre  $K_1 > 0$  existuje  $P(\infty)$  tak, že pre všetky  $z \in P(\infty)$  je  $|f(z)| \leq K_1$ . Množina  $\mathbb{C} \setminus P(\infty)$  je kompaktná množina a  $f$  je spojitá, preto musí existovať  $K_2 > 0$  tak, že pre všetky  $z \in \mathbb{C} \setminus P(\infty)$  je  $|f(z)| \leq K_2$ .

Preto pre všetky  $z \in \mathbb{C}$  je  $|f(z)| \leq \max \{K_1, K_2\}$ , čo znamená, že  $f$  je na  $\mathbb{C}$  ohraničená. Podľa vety 4.1 musí byť funkcia  $f$  (taktiež i  $p$ ) na  $\mathbb{C}$  konštantná, čo je spor s definíciou  $f$  a nekonštantnosťou  $p$ . □

Dôkaz 2. Sporom budeme znova predpokladať, že  $p$  nemá žiadny komplexný koreň. Funkcia  $f = \frac{1}{p}$  je holomorfná v  $\mathbb{C}$ . Pre  $R \in \mathbb{R}^+$  definujme integrál

$$I_R \stackrel{\text{def.}}{=} \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z} dz,$$

kde  $\gamma_R : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma_R(t) = Re^{2\pi i t}$ .

Jedinou izolovanou singularitou funkcie  $\frac{f(z)}{z}$  v  $\text{int } \gamma_R$  je bod 0. Z využitím reziduovej vety 2.42 a vety 2.40 (iii) platí

$$I_R = \int_{\gamma_R} \frac{\frac{1}{p(z)}}{z} dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=0} \left( \frac{\frac{1}{p(z)}}{z} \right) = 2\pi i \frac{1}{p(0)},$$

potom  $|I_R| = \frac{2\pi}{|p(0)|}$ , čo je nejaké kladné číslo, ktoré nezávisí na  $R$ .

Taktiež platí (z využitím vety 2.29)

$$|I_R| \leq \underbrace{\text{dĺžka}(\gamma_R)}_{\text{konst.} = 2\pi R} \max_{z \in \langle \gamma_R \rangle} \frac{1}{|zp(z)|} = 2\pi R \frac{1}{R} \max_{|z|=R} \frac{1}{|p(z)|} =$$



#### 4 ZÁKLADNÁ VETA ALGEBRY

$$= 2\pi \max_{|z|=R} \frac{1}{|z^n| \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right|} \rightarrow 0 \quad \text{pre } R \rightarrow \infty.$$

Teda pre  $R \rightarrow \infty$  je  $|I_R| \rightarrow 0$  a zároveň  $|I_R| \rightarrow \frac{2\pi}{|p(0)|}$ , čo je spor. Preto musí mať polynóm kladného stupňa v  $\mathbb{C}$  aspoň jeden koreň.  $\square$

*Dôkaz 3.* [10] Predpokladajme sporom, že  $p$  nemá žiadny komplexný koreň. Funkcia  $f = \frac{1}{p}$  je holomorfná v  $\mathbb{C}$ . Definujme funkciu  $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$  predpisom

$$w(x, y) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{k=1}^n |f(x + iy + k)|^2,$$

kde  $n \in \mathbb{N}$  je stupeň polynómu  $p$ .

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{|a_n(x + iy + k)^n + \dots + a_0|^2} \rightarrow 0 \quad \text{pre } x + iy \rightarrow \infty,$$

a keďže  $w(0, 0) > 0$ , existuje  $P(\infty)$  tak, že pre všetky  $(x, y) \in P(\infty)$  platí

$$|w(x, y)| = w(x, y) < w(0, 0). \quad (4.3)$$

Množina  $\mathbb{R}^2 \setminus P(\infty)$  je kompaktná, preto existuje  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus P(\infty)$  také, že

$$\max_{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus P(\infty)} w(x, y) =: w(x_0, y_0).$$

Vzhľadom k (5.6) je

$$\max_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} w(x, y) = w(x_0, y_0).$$

Z využitím lemy 4.2 a 4.3 plynie

$$\Delta w(x_0, y_0) = \sum_{k=1}^n \Delta(|f(x_0 + iy_0 + k)|^2) = \sum_{k=1}^n 4|f'(x_0 + iy_0 + k)|^2 \leq 0.$$

Preto pre všetky  $k \in \{1, \dots, n\}$  musí platiť

$$f'(x_0 + iy_0 + k) = -\frac{p'(x_0 + iy_0 + k)}{p^2(x_0 + iy_0 + k)} = 0.$$

Polynóm  $p'$  bude mať stupeň  $n - 1$  a  $n$  navzájom rôznych koreňov, čo je spor s lemmou 4.4. (Polynóm stupňa  $n - 1$  môže mať maximálne  $n - 1$  navzájom rôznych koreňov.)  $\square$

*Dôkaz 4.* Definujme

$$f(z) \stackrel{\text{def.}}{=} a_n z^n, \quad g(z) \stackrel{\text{def.}}{=} a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

## 4 ZÁKLADNÁ VETA ALGEBRY

---

Zrejme  $p(z) = f(z) + g(z)$ . Položme

$$\gamma(t) = Re^{it} \quad \text{pre } t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$

kde  $R$  je tak dostatočne veľké, že

$$|f(z)| > |g(z)| \quad \text{pre } |z| \geq R.$$

Také  $R$  existuje, pretože keďže

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{g(z)}{f(z)} = 0,$$

existuje  $\delta > 0$  tak, že

$$(\forall z \in P(\infty, \delta)) : \left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| < 1.$$

Stačí teda zvoliť  $R = \frac{1}{\delta}$ , kde  $0 < \tilde{\delta} < \delta$ .

Keďže

$$|p(z)| = |f(z) + g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0 \quad \text{pre } |z| \geq R,$$

tak pokiaľ  $p$  má nejaký koreň, tak len vo vnútri krivky  $\gamma$ . Podľa vety 3.10 má funkcia  $f + g = p$  a funkcia  $f$  rovnaký počet koreňov vo vnútri krivky  $\gamma$ . Počet koreňov  $f$  v  $\text{int } \gamma$  je práve  $n$  ( $f$  má  $n$ -násobný koreň 0) a polynóm  $p$  má korene len v  $\text{int } \gamma$ , čo znamená, že  $p$  má v  $\mathbb{C}$  práve  $n$  koreňov. Keďže  $n$  je kladné,  $p$  musí mať v  $\mathbb{C}$  aspoň jeden koreň, čím je veta dokázaná (dokonca v silnejšej verzii, pretože viem i presný počet koreňov). □

## 5 Metóda Newtonových súm

### 5.1 Newtonove vzťahy

Nech  $f$  a  $\gamma$  spĺňajú predpoklady vety 3.6,  $z_1, \dots, z_n$  sú všetky navzájom rôzne korene  $f$  ležiace v  $\text{int } \gamma$  a  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sú ich príslušné násobnosti. Podľa vety 3.6 platí (stačí zvoliť  $\psi(z) = 1$  a  $\phi(z) = z^k$ , kde  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ )

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} z^k \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i^k =: s_k. \quad (5.1)$$

Je zrejmé, že hodnota  $s_k$ , pre  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  je súčet  $k$ -tých mocnín všetkých koreňov  $f$  ležiacich v  $\text{int } \gamma$ . Počet koreňov (vrátane násobností)  $N$  zadanej funkcie  $f$  bude udávať hodnota  $s_0$ . Cieľom bude skonštruovať polynóm  $P_N(z)$  stupňa  $N$

$$P_N(z) \stackrel{\text{def.}}{=} z^N + \sigma_1 z^{n-1} + \dots + \sigma_N, \quad (5.2)$$

ktorý má rovnaké korene (vrátane násobností) ako zadaná funkcia  $f$  vo vnútri danej krivky  $\gamma$ .

Medzi koeficientami polynómu  $P_N(z)$  a súčtami  $k$ -tých mocnín koreňov polynómu platia Newtonovy vzťahy:

#### Veta 5.1. (Newtonove vzťahy)

Nech  $\sigma_1, \dots, \sigma_N$  sú koeficienty polynómu (5.2),  $s_k = \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i^k$ , kde  $k \in \{1, \dots, N\}$  a  $z_1, \dots, z_n$  sú všetky navzájom rôzne korene polynómu (5.2) a  $\alpha_i$  príslušné násobnosti. Potom platí

$$\begin{aligned} s_1 + \sigma_1 &= 0 \\ s_2 + s_1 \sigma_1 + 2\sigma_2 &= 0 \\ &\vdots \\ s_N + s_{N-1} \sigma_1 + \dots + s_1 \sigma_{N-1} + N\sigma_N &= 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Dôkaz. Vid' [6]. □

Keďže chceme aby polynóm  $P_N(z)$  mal rovnaké korene ako zadaná funkcia  $f$  vo vnútri krivky  $\gamma$ , podľa (5.1) bude pre  $s_k$ , kde  $k \in \{1, \dots, N\}$ , platiť

$$s_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} z^k \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \quad (5.4)$$

Dosadením  $s_k$  do (5.3) a vyriešením vzniknutej sústavy dostaneme koeficienty  $\sigma_1, \dots, \sigma_N$  polynómu (5.2). Nájdením koreňov tohto polynómu dostaneme hľadané korene funkcie  $f$  vo vnútri  $\gamma$ .

Problém hľadania koreňov  $f$  v  $\text{int } \gamma$  pomocou metódy Newtonových súm je zvyčajne zle podmienený - to znamená, že pokiaľ v sústave (5.3) zmeníme známe hodnoty  $s_k$ , kde

## 5 METÓDA NEWTONOVÝCH SÚM

$k \in \{1, \dots, N\}$  veľmi málo, dostaneme veľké zmeny v koreňoch polynómu, ktorého koeficienty sú riešením takto zmenenej sústavy.

Napríklad pre nejakú funkciu  $f$ , ktorá má 10 jednonásobných koreňov

$$z_1 = 1, z_2 = 2, z_3 = 3, z_4 = 4, z_5 = 5, z_6 = 6, z_7 = 7, z_8 = 8, z_9 = 9, z_{10} = 10.$$

Pre  $s_k, k \in 1, \dots, 10$  platí

$$s_1 = 55, s_2 = 385, s_3 = 3025, s_4 = 25333, s_5 = 220825, s_6 = 1978405,$$

$$s_7 = 18080425, s_8 = 167731333, s_9 = 1574304985, s_{10} = 14914341925.$$

Sústava (5.3) bude mať tvar

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_2 & s_1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_5 & s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_6 & s_5 & s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ s_7 & s_6 & s_5 & s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & 8 & 0 & 0 \\ s_8 & s_7 & s_6 & s_5 & s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & 9 & 0 \\ s_9 & s_8 & s_7 & s_6 & s_5 & s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ \sigma_7 \\ \sigma_8 \\ \sigma_9 \\ \sigma_{10} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ s_7 \\ s_8 \\ s_9 \\ s_{10} \end{bmatrix}.$$

Riešením tejto sústavy dostaneme koeficienty polynómu  $P_{10}(z)$  (vid' (5.2)):

$$P_{10}(z) = z^{10} - 55z^9 + 1320z^8 - 18150z^7 + 157773z^6$$

$$-902055z^5 + 3416930z^4 - 8409500z^3 + 12753576z^2 - 10628640z + 3628800,$$

ktorého korene sú  $z_i = i, i = 1, \dots, 10$ .

Zmeňme  $s_3$  tak, že  $s_3 = 3024.999$ . Riešením takto zmenenej sústavy, dostaneme koeficienty polynómu stupňa 10, ktorý má korene

$$z_1 = 0.9947825715, z_2 = 2.036400896, z_3 = 2.901261805, z_4 = 4.239676379, z_5 = 4.722947806,$$

$$z_6 = 6.212115904, z_7 = 6.857684497, z_8 = 8.044887010, z_9 = 8.989170762, z_{10} = 10.00107237.$$

Keďže problém hľadania koreňov  $f$  metódou Newtonových súm je takto zle podmienený, v prípade, že  $f$  bude mať vnútri danej krivky veľa koreňov, budeme musieť integrály (5.4) aproximovať s veľkou presnosťou.

### 5.2 Numerická integrácia

Pre aproximáciu integrálov (5.4) použijeme **lichobežníkové pravidlo**.

Nech  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{C}$  je krivka a nech  $g$  je spojitá na  $\langle \gamma \rangle$ .  
Zvoľme pre  $n \in \mathbb{N}$  ekvidistantné delenie

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Z využitím definície 2.28 a 2.26 platí

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} g(z) dz &= \int_a^b \underbrace{g(\gamma(t)) \gamma'(t)}_{=:h(t)} dt = \int_a^b \underbrace{\operatorname{Re} h(t)}_{=:h_{Re}(t)} dt + i \int_a^b \underbrace{\operatorname{Im} h(t)}_{=:h_{Im}(t)} dt \approx \\ &\approx \underbrace{\frac{b-a}{n} \left[ \frac{h_{Re}(t_0)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} h_{Re}(t_i) + \frac{h_{Re}(t_n)}{2} \right]}_{=:L_n(h_{Re};a,b)} + i \underbrace{\frac{b-a}{n} \left[ \frac{h_{Im}(t_0)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} h_{Im}(t_i) + \frac{h_{Im}(t_n)}{2} \right]}_{=:L_n(h_{Im};a,b)} \\ &= \underbrace{\frac{b-a}{n} \left[ \frac{h(t_0)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} h(t_i) + \frac{h(t_n)}{2} \right]}_{=:L_n(h;a,b)}. \end{aligned}$$

Pripomeňme si vetu, ktorá sa týka odhadu chyby lichobežníkového pravidla pre reálne funkcie.

**Veta 5.2.** Nech  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^2(\langle a, b \rangle)$  a  $n \in \mathbb{N}$ . Nech  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$  je ekvidistantné delenie intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Označme chybu lichobežníkového pravidla

$$l_n(f; a, b) := \underbrace{\frac{b-a}{n} \left[ \frac{f(t_0)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(t_i) + \frac{f(t_n)}{2} \right]}_{=:L_n(f;a,b)} - \int_a^b f(t) dt.$$

Potom pre chybu lichobežníkového pravidla platí:

$$|l_n(f; a, b)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{t \in \langle a, b \rangle} |f''(t)|.$$

Dôkaz. ved' [12]. □

Pokiaľ  $g$  je holomorfná v každom bode z  $\langle \gamma \rangle$  a  $\gamma \in C^3(\langle a, b \rangle)$ , potom pre  $h_{Re} : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  (resp.  $h_{Im} : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ) platí, že  $h_{Re} \in C^2(\langle a, b \rangle)$  (resp.  $h_{Im} \in C^2(\langle a, b \rangle)$ ). Potom podľa vety 5.2 pre

$$l_n(h_{Re}; a, b) := L_n(h_{Re}; a, b) - \int_a^b h_{Re}(t) dt$$

$$\left( \text{resp. } l_n(h_{Im}; a, b) := L_n(h_{Im} - \int_a^b h_{Im}(t) dt) \right)$$

platí

$$|l_n(h_{Re}; a, b)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{t \in \langle a, b \rangle} |h''_{Re}(t)|.$$

$$\left( \text{resp. } |l_n(h_{Im}; a, b)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{t \in \langle a, b \rangle} |h''_{Im}(t)| \right).$$

Zrejme

$$\begin{aligned} & \underbrace{\left| L_n(h; a, b) - \int_a^b h(t) dt \right|}_{=: l_n(h; a, b)} = |l_n(h_{Re}; a, b) + i l_n(h_{Im}; a, b)| \leq \\ & \leq \sqrt{\left( \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{t \in \langle a, b \rangle} |h''_{Re}(t)| \right)^2 + \left( \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{t \in \langle a, b \rangle} |h''_{Im}(t)| \right)^2} = \\ & \frac{(b-a)^3}{12n^2} \sqrt{\left( \max_{t \in \langle a, b \rangle} |h''_{Re}(t)| \right)^2 + \left( \max_{t \in \langle a, b \rangle} |h''_{Im}(t)| \right)^2}. \end{aligned}$$

Zvoľme presnosť  $\varepsilon_{pr} > 0$ . Pokiaľ pre  $n \in \mathbb{N}$  platí

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2} \sqrt{\left( \max_{t \in \langle a, b \rangle} |h''_{Re}(t)| \right)^2 + \left( \max_{t \in \langle a, b \rangle} |h''_{Im}(t)| \right)^2} < \varepsilon_{pr},$$

to znamená, že platí

$$n > \sqrt{\frac{(b-a)^3 \sqrt{\left( \max_{t \in \langle a, b \rangle} |h''_{Re}(t)| \right)^2 + \left( \max_{t \in \langle a, b \rangle} |h''_{Im}(t)| \right)^2}}{12\varepsilon_{pr}}}, \quad (5.5)$$

potom

$$|l_n(h; a, b)| < \varepsilon_{pr}.$$

Pre dosiahnutie požadovanej presnosti  $\varepsilon_{pr}$  je (5.5) len postačujúca podmienka. To znamená, že v skutočnosti môže nastať, že na dosiahnutie požadovanej presnosti  $\varepsilon_{pr}$  lichobežníkového pravidla, budeme potrebovať menej dielkov ako  $n$  určeným pomocou (5.5).

V tejto a v ďalšej kapitole budeme potrebovať aproximáciu integrálu

$$\int_{\gamma} \frac{1}{2\pi i} \phi(z) \psi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz, \quad (5.6)$$

kde  $f, \gamma$  splňujú predpoklady vety 3.6 a  $\psi, \phi$  sú komplexné polynómy.

Pokiaľ hľadáme korene funkcie  $f$  vo vnútri kruhu s polomerom  $\rho$  a stredom  $c$  (tzn.  $\gamma(t) = c + \rho e^{2\pi it}$ ,  $t \in \langle 0, 1 \rangle$ ), potom pre integrál (5.6) platí

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{1}{2\pi i} \phi(z) \psi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \int_0^1 \underbrace{\rho \phi(c + \rho e^{2\pi i t}) \psi(c + \rho e^{2\pi i t}) \frac{f'(c + \rho e^{2\pi i t})}{f(c + \rho e^{2\pi i t})}}_{=: h(t)} e^{2\pi i t} dt \approx \\ &\approx \underbrace{\frac{1}{n} \left[ \frac{h(0)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} h\left(\frac{i}{n}\right) + \frac{h(1)}{2} \right]}_{=: L_n(h; 0,1)}. \end{aligned}$$

Keďže  $h : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{C}$  je periodická s periódou 1 (tzn.  $h(0) = h(1)$ ) platí

$$L_n(h; 0, 1) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} h\left(\frac{i}{n}\right).$$

Taktiež platí

$$L_{2n}(h; 0, 1) = \frac{1}{2}L_n(h; 0, 1) + \frac{1}{2n} \sum_{i=0}^{n-1} h \left( \frac{2i+1}{2n} \right).$$

To znamená, že postupným zdojnásobovaním dielkov využívame hodnoty použité v predchádzajúcom kroku. Začneme s  $n = 1$  a  $n$  zdojnásobujeme dovtedy, kým  $|L_{2n}(h; 0, 1) - L_n(h; 0, 1)| < \varepsilon_{int}$ , kde  $\varepsilon_{int}$  je dostatočne malé.

Integrály (5.6) budeme aproximovať lichobežníkovým pravidlom. Pokiaľ však budeme chcieť aproximovať integrály s požadovanou presnosťou, nepotrebujeme na to až taký počet dielkov (také  $n$ ) ako je určený v (5.5). V takomto prípade by sme museli navyše vyhodnotiť maximum absolútnej hodnoty druhej derivácie reálnej i imaginárnej zložky komplexnej funkcie reálnej premennej, čo môže byť náročné. Pokiaľ budeme hľadať korene funkcie vo vnútri kruhu, integrály (5.6) budeme vo väčšine prípadov aproximovať lichobežníkovým pravidlom so zdvojnásobením dielkov až kým  $|L_{2n}(h; 0, 1) - L_n(h; 0, 1)|$  nebude dostatočne malé.

### 5.3 Numerické výsledky

### Príklad 1. Majme funkciu

$$f(z) = \sin z - z^3 - i.$$

Chceme zistiť všetky korene funkcie  $f$  vo vnútri krivky  $\gamma(t) := 4e^{2\pi it}$ ,  $t \in \langle 0, 1 \rangle$ .

Počet koreňov vo vnútri tejto krivky udáva hodnota  $s_0$  daná vzťahom (5.4). Keďže počet koreňov je nezáporné celé číslo, integrál  $s_0$  ( $s_0$  predstavuje počet koreňov vo vnútri danej krivky) stačí aproximovať lichobežníkovým pravidlom s presnosťou  $\varepsilon_{pr} = 0.5$ . Počet dielkov lichobežníkového pravidla potrebných pre túto presnosť určíme zo vzťahu (5.5).

## 5 METÓDA NEWTONOVÝCH SÚM

Na to ale potrebujeme určiť maximum absolútnej hodnoty druhej derivácie reálnej i imaginárnej zložky komplexnej funkcie reálnej premennej, čo určíme pomocou mapleovskej funkcie `Maximize`.

Pre výpočet integrálu  $s_0$  s presnosťou  $\varepsilon_{pr} = 0.5$  je potrebných  $n = 6$  dielkov. Dostaneme

$$s_0 = +2.968002259613838715764032 + 0.i,$$

z čoho je zrejmé, že funkcia  $f$  má v danom kruhu 3 korene.

Integrály  $s_1, s_2, s_3$  aproximujeme lichobežníkovým pravidlom s presnosťou  $\varepsilon_{pr} = 0.01$ . Počet dielkov potrebných pre aproximáciu  $s_1$  je  $n = 129$ , pre  $s_2$  je  $n = 330$  a pre  $s_3$  je  $n = 939$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1 &= +4.67 \cdot 10^{-24} & -0.005982625701614841347603i; \\ \mathbf{s}_2 &= +1.724835744235194203292190 & +2.017 \cdot 10^{-24}i; \\ \mathbf{s}_3 &= +2.41 \cdot 10^{-23} & -2.602520042656087556699959i. \end{aligned}$$

Dosadením  $s_1, s_2, s_3$  do (5.3) a vyriešením vzniknutej sústavy, získame koeficienty  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Korene polynómu  $P_3(z) = z^3 + \sigma_1 z^2 + \sigma_2 z + \sigma_3$ , sú korene funkcie  $f$  vo vnútri krivky  $\gamma$  (pre výpočet koreňov polynómu použijeme mapleovský príkaz `solve`):

$$\begin{aligned} z_1 &= +1.092010155784011393408984 - 0.3336880146173579045623702i; \\ z_2 &= -8.732649398925948115428827 \cdot 10^{-24} + 0.6613934035331009677771475i; \\ z_3 &= -1.092010155784011393408974 - 0.3336880146173579045623792i. \end{aligned}$$

Pokiaľ pre aproximáciu integrálov  $s_0, s_1, s_2$  a  $s_3$  použijeme lichobežníkové pravidlo so zdvojnásobením dielkov tak, že začneme so 150 dielkami a ako zastavovacie kritérium použijeme použijeme hodnotu  $\varepsilon_{int} = 0.01$ , počet dielkov potrebných pre výpočet  $s_0$  až  $s_3$  bude  $n = 150$ . Dostaneme aproximáciu

[illegible]

Dosadením  $s_1, s_2, s_3$  do (5.3) a vyriešením vzniknutej sústavy, získame koeficienty polynómu  $P_3$ , ktorého korene budú hľadané korene funkcie  $f$  v danom kruhu. Získame korene

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1 &= +1.092010155784011393408975 & -0.333688014617357904562366i; \\ \mathbf{z}_2 &= -2.929292965103325441581245 \cdot 10^{-24} & +0.661393403533100967777135i; \\ \mathbf{z}_3 &= -1.092010155784011393408973 & -0.333688014617357904562373i. \end{aligned}$$

V porovnaní s koreňmi  $f$  získanými mapleovskou funkciou `fsolve`, dostaneme v oboch prípadoch takmer rovnakú aproximáciu  $z_1, z_2, z_3$ . Počet zhodných desiatinných miest je podčiarknutých. V prípade aproximácie pomocou lichobežníkového pravidla so zadanou presnosťou je výpočet časovo náročný, kôli vyhodnocovaniu maxima absolútnej hodnoty druhej derivácie reálnej a imaginárnej zložky komplexnej funkcie reálnej premennej.



## 5 METÓDA NEWTONOVÝCH SÚM

---

**Poznámka 5.3.** Mapleovská funkcia `fsolve` ( $\sin(z) - z^3 - I, z, \text{complex}$ ) nájde len jeden koreň funkcie

$$f(z) = \sin(z) - z^3 - i$$

a to

$$1.092010155784011393408977 - 0.3336880146173579045623713i.$$

Pokiaľ však zadáme `fsolve` ( $\sin(z) - z^3 - I, z, \{z = 1.0 - 0.5 \cdot I..1.5 + 0.1 \cdot I\}, \text{complex}$ ), získame koreň

$$1.092010155784011393408977 - 0.3336880146173579045623713i.$$

Pre `fsolve` ( $\sin(z) - z^3 - I, z, \{z = -1.5 - 0.5 \cdot I..-1 + 0.1 \cdot I\}, \text{complex}$ ) získame koreň

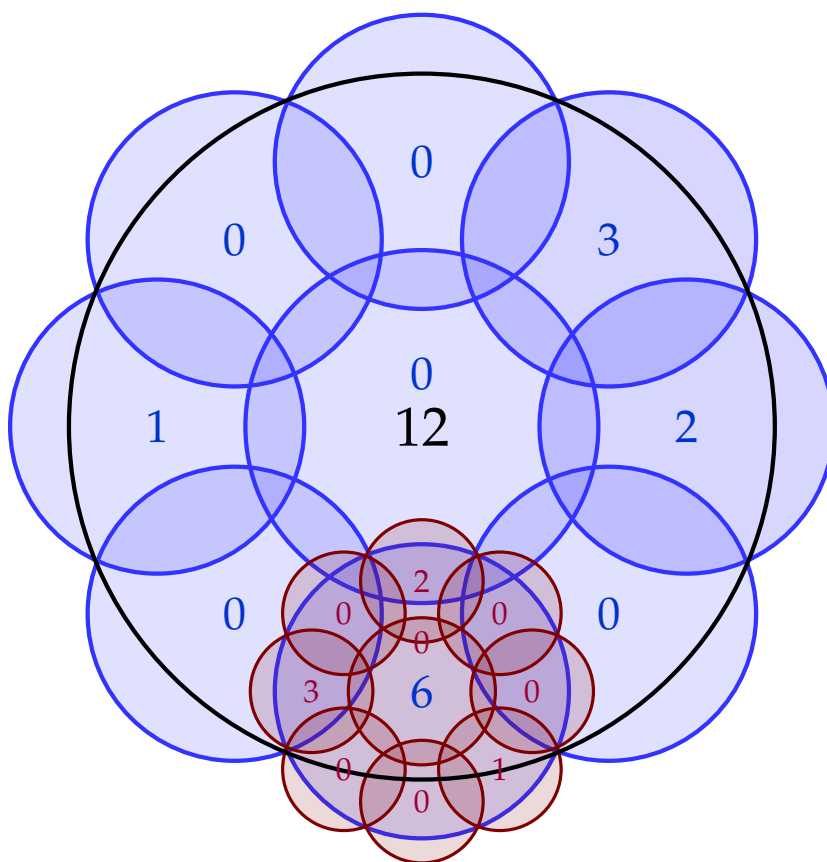
$$-1.092010155784011393408977 - 0.3336880146173579045623713i.$$

A pre `fsolve` ( $\sin(z) - z^3 - I, z, \{z = -0.5 + 0.5 \cdot I..0.5 + 1.0 \cdot I\}, \text{complex}$ ) získame koreň

$$7.077527391670644616151113 \cdot 10^{-48} + 0.6613934035331009677771403i.$$

Teda, pokiaľ chceme získať koreň  $f$  musíme sa „trafiť“ do správneho „obdĺžnika“, v ktorom sa vyskytuje aspoň jeden koreň  $f$ . Maple však vždy vypíše len jeden koreň.

Pokiaľ má funkcia  $f$  vo vnútri danej krivky veľa koreňov, polynóm  $P_N(z)$  bude vysokého stupňa a bude zle podmienený (tzn. malé zmeny hodnôt v sústave (5.3) vyvolajú veľkú zmenu v koreňoch polynómu  $P_N(z)$ , ktorého koeficienty sú riešením sústavy (5.3)). Pokiaľ chceme, aby polynóm bol nízkeho stupňa (maximálne nejaká prednastavená konštanta  $M$ ), vnútro danej krivky rozdelíme na niekoľko podoblastí a skúmame koľko koreňov má funkcia v danej podoblasti. Danú podoblasť delíme až dovtedy, kým nezistíme, že vo vnútri sa nachádza maximálne  $M$  koreňov. Potom pre každú podoblasť vytvoríme polynóm stupňa maximálne  $M$ , ktorý má rovnaké korene ako funkcia  $f$ , vid' obr. 5.1.



Obr. 5.1: Rozklad kruhu

Na obrázku 5.1 je kruh, v ktorej má nejaká funkcia 12 koreňov. Tento kruh delíme na menšie kruhy dovtedy, kým v každom kruhu nebude mať funkcia maximálne 3 korene.

V prípade, že hľadáme korene danej funkcie vo vnútri kruhu a chceme tento kruh deliť na menšie kruhy, môže nastať, že nejaký menší kruh nebude celý ležať v pôvodnom kruhu. (viď obr.5.1. Preto je potrebné aby funkcia  $f$  ktorej korene hľadáme, bola holomorfná i v kruhu s o niečo väčším polomerom, ako má pôvodný kruh, na ktorom hľadáme korene  $f$ .

V prípade delenia kruhov, keďže môže nastať, že po delení kruhu na menšie kruhy, koreň  $f$  nachádzajúci sa v menšom kruhu nepadne do pôvodného kruhu (viď obr. 5.1, môže sa stať, že menší kruh nepadne celý do pôvodného kruhu a  $f$  má koreň v tomto menšom kruhu, ale nie v pôvodnom) je potrebné kontrolovať, či sa všetky korene v menšom kruhu (určenom delením pôvodného kruhu) nachádzajú taktiež v pôvodnom kruhu. Môže tiež nastať, že niektoré menšie kruhy budú mať rovnaké korene (niektoré menšie kruhy nie sú disjunktné).

## 5 METÓDA NEWTONOVÝCH SÚM

**Príklad 2.** Majme funkciu

$$f(z) = (z - 0.5)(z - 1)(z - 1.5)(z - 2)(z - 2.5)(z - 3)(z - 3.5)(z - 4)(z - 4.5)(z - 5).$$

Funkcia  $f$  má v kruhu  $\gamma(t) := \frac{11}{2}e^{2\pi it}$ ,  $t \in \langle 0, 1 \rangle$  10 jednonásobných koreňov (sú to korene 0.5, 1, ..., 4.5, 5).

Najprv daný kruh nedeľme a hľadáme korene  $f$  v pôvodnom kruhu. Vytvorme teda polynóm (5.2) stupňa 10 (jeho koeficienty získame riešením sústavy (5.3)), ktorý má rovnaké korene ako  $f$ . Pre aproximáciu integrálov (5.4) potrebných v sústave použijeme lichobežníkové pravidlo, dielky, teda  $n$ , budeme zdokonaľovať až kým  $|L_{2n} - L_n| < 0.01$ . Korene výsledného polynómu a teda i funkcie  $f$  sú

$$\begin{array}{ll} z_1 = & +5.005467611463770711194444 \quad +3.721477057090288446736420 \cdot 10^{-22}i; \\ z_2 = & +4.184060716648703214839301 \quad +3.189600101185067681146837 \cdot 10^{-20}i; \\ z_3 = & +1.179722185792468537973841 \quad +0.070166314690645924923840i; \\ z_4 = & +3.313179616392354731253123 \quad +0.369643543904534513904853i; \\ z_5 = & +2.203620388030727676498329 \quad +0.403262852423866798149522i; \\ z_6 = & +2.203620388030727676685547 \quad -0.403262852423866798139986i; \\ z_7 = & +3.313179616392354731355899 \quad -0.369643543904534513865031i; \\ z_8 = & +1.179722185792468538506929 \quad -0.070166314690645924980459i; \\ z_9 = & +0.489317704663744657259219 \quad -1.019532436135123442420250 \cdot 10^{-20}i; \\ z_{10} = & +4.428112677568831095024659 \quad -1.481351894940211531538986 \cdot 10^{-20}i. \end{array}$$

Môžeme si všimnúť, že korene nie sú presné. Rozdeľme pôvodný kruh na menšie kruhy tak, aby v každom menšom kruhu boli maximálne 2 korene (viď obr. 5.1). Dostaneme 13 rôznych kruhov, v ktorých má  $f$  maximálne 2 korene. Integrály potrebné pri výpočte koreňov aproximujeme lichobežníkovým pravidlom s rovnakým zastavovacím kritériom ako sme použili pri hľadaní koreňov v celom (pôvodnom) kruhu.

V kruhu  $\gamma_1(t) = \frac{649}{384} + \frac{1375}{3456}e^{2\pi it}$  má  $f$  2 korene:

$$\begin{array}{ll} z_1 = & +1.99999999971835161694675 \quad +3.300000000850578116917731 \cdot 10^{-24}i; \\ z_2 = & +1.50000000056329676606682 \quad -5.900000000850578116917731 \cdot 10^{-24}i. \end{array}$$

V kruhu  $\gamma_2(t) = \frac{1199}{384} + \frac{1375}{3456}e^{2\pi it}$  má  $f$  2 korene:

$$\begin{array}{ll} z_1 = & +3.496509852129038789316335 \quad +8.800860479977584442953476 \cdot 10^{-23}i; \\ z_2 = & +3.004871840634015925450634 \quad -7.467527146644251109620143 \cdot 10^{-23}i. \end{array}$$

V kruhu  $\gamma_3(t) = \frac{77}{32} + \frac{275}{576}e^{2\pi it}$  má  $f$  2 korene:

$$\begin{array}{ll} z_1 = & +2.499999999878530434102305 \quad +3.693333335761026288735351 \cdot 10^{-24}i; \\ z_2 = & +2.000000000182194971487696 \quad -4.200000002427692955402017 \cdot 10^{-24}i. \end{array}$$

V kruhu  $\gamma_4(t) = \frac{187}{32} + \frac{275}{288}e^{2\pi it}$  má  $f$  1 koreň:

$$z_1 = +5.000000043652284129902284 \quad -1.11266666666666666666667 \cdot 10^{-23}i.$$



## 5 METÓDA NEWTONOVÝCH SÚM

**Príklad 3.** Majme funkciu

$$f(z) = (z - 1)^{10}(z - 5)^5.$$

Funkcia  $f$  má v kruhu  $\gamma(t) := 6e^{2\pi it}$ ,  $t \in \langle 0, 1 \rangle$  10– násobný koreň  $z_1 = 1$  a 5–násobný koreň  $z_2 = 5$ .

V takomto prípade, keďže  $f$  má korene vysokých násobností, delenie daného kruhu nie je vhodné. Preto budeme hľadať korene  $f$  vo vnútri pôvodného kruhu. Integrály (5.4) aproximujeme lichobežníkovým pravidlom so zdojnásobovaním dielkov a ukončujúcou podmienkou  $\varepsilon_{int} = 0.01$ .

Dostaneme aproximáciu

$z_1$	$=$	$+5.036381186856246605678114$	$-1.476779389096175805163141 \cdot 10^{-14}i;$
$z_2$	$=$	$+4.969812874803225759598847$	$+0.022466934217978947752386i;$
$z_3$	$=$	$+5.011996634094454287411142$	$+0.034820449273170665356415i;$
$z_4$	$=$	$+1.388006013656406723020177$	$+0.133864366643701020647969i;$
$z_5$	$=$	$+0.642231104374253529707394$	$+0.111361117153161045024819i;$
$z_6$	$=$	$+1.221493984332641107622560$	$+0.334147838750157175700973i;$
$z_7$	$=$	$+0.766490291208436283866059$	$+0.299268611641491883815825i;$
$z_8$	$=$	$+0.981778504119421323123416$	$+0.388495512411860476955731i;$
$z_9$	$=$	$+0.981778504119206473411307$	$-0.388495512411845165468035i;$
$z_{10}$	$=$	$+0.766490291208274624361723$	$-0.299268611641361168829738i;$
$z_{11}$	$=$	$+1.221493984332449943985735$	$-0.334147838750277054981473i;$
$z_{12}$	$=$	$+0.642231104374194210911394$	$-0.111361117152966014912480i;$
$z_{13}$	$=$	$+1.388006013656327394851686$	$-0.133864366643922197491739i;$
$z_{14}$	$=$	$+5.011996634094425838207090$	$-0.034820449273181101311866i;$
$z_{15}$	$=$	$+4.969812874803206477003833$	$-0.022466934217953744464894i.$

Aproximácia koreňov je pri veľkom počte koreňov je dosť nepresná.

Metóda Newtonových súm funguje dobre len v prípade, že daná funkcia má vo vnútri danej krivky málo koreňov. V prípade, že koreňov bude veľa, polynóm (5.2) bude zle podmienený a aproximácia koreňov nebude taká, akú by sme očakávali. Vnútro danej krivky môžeme rozdeliť na menšie krivky, v ktorých bude mať funkcia len „malý“ počet koreňov. Toto je však nevhodná voľba v prípade, že korene ležia blízko seba alebo sú viacnásobné.

V ďalšej kapitole si predstavíme formálne ortogonálne polynómy a následne algoritmus, ktorý určí všetky navzájom rôzne korene danej funkcie vo vnútri krivky a následne ich príslušné násobnosti. Aproximácia koreňov bude omnoho presnejšia.

## 6 Formálne ortogonálne polynómy

V tejto kapitole si zadefinujeme formálne ortogonálne polynómy a na základe nich zostavíme algoritmus, ktorý dáva dobrú aproximáciu koreňov hľadanej holomorfnej funkcie. Uvedme, že poznatky tejto kapitoly sú prevzaté z článkov [2], [3], [4] a [5].

### 6.1 Vlastnosti formálnych ortogonálnych polynómov

Nech  $\mathcal{P}$  je lineárny priestor polynómov s komplexnými koeficientami. Nech  $f, \gamma$  spĺňajú predpoklady vety 3.6,  $z_1, \dots, z_n$  sú všetky navzájom rôzne korene  $f$  v int  $\gamma$  a  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sú ich príslušné násobnosti. Definujme symetrickú bilineárnu formu  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$  podľa predpisu

$$\langle \phi, \psi \rangle \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \phi(z) \psi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi(z_i) \psi(z_i), \quad (6.1)$$

pre každé dva polynómy  $\phi, \psi \in \mathcal{P}$ , kde  $f$  splňuje vlastnosti vety 3.6,  $z_1, \dots, z_n$  sú navzájom rôzne korene funkcie  $f$ , ktoré ležia vo vnútri krivky  $\gamma$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sú ich príslušné násobnosti.

Potom pre  $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  platí

$$s_p := \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i^p = \langle 1, z^p \rangle.$$

Označme  $H_t$  maticu  $t \times t$

$$H_t \stackrel{\text{ozn.}}{=} \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{t-1} \\ s_1 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ s_{t-1} & \cdots & \cdots & s_{2t-2} \end{bmatrix},$$

a  $H_t^{(1)}$  maticu  $t \times t$

$$H_t^{(1)} \stackrel{\text{ozn.}}{=} \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_t \\ s_2 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ s_t & \cdots & \cdots & s_{2t-1} \end{bmatrix}.$$

**Poznámka 6.1.** Maticu  $A = [a_{p,q}]_{p,q=0}^{t-1} \in \mathbb{C}^{t \times t}$  budeme nazývať Hankelova matica, pokiaľ existuje  $b_0, \dots, b_{2t-2} \in \mathbb{C}$  tak, že  $a_{p,q} = b_{p+q}$ .

Je zrejmé, že matice  $H_t$  a  $H_t^{(1)}$  sú Hankelove matice.

## 6 FORMÁLNE ORTOGONÁLNE POLYNÓMY

**Definícia 6.2.** *Pokiaľ monický polynóm (jeho vedúci koeficient je rovný 1)  $\varphi_t$  stupňa  $t \geq 0$  definovaný predpisom*

$$\varphi_t(z) \stackrel{\text{def.}}{=} u_{0,t} + u_{1,t}z + \dots + u_{t-1,t}z^{t-1} + z^t, \quad (6.2)$$

*splňuje*

$$\langle z^k, \varphi_t(z) \rangle = 0 \quad \text{pre každé } k \in \{0, 1, \dots, t-1\}, \quad (6.3)$$

*budeme ho nazývať **formálny ortogonálny polynóm (FOP)** stupňa  $t$ .*

FOP  $\varphi_t$  nemusí existovať alebo nemusí byť jednoznačný pre každé  $t > 0$ . Pokiaľ je  $\varphi_t$  podmienkami (6.3) určený jednoznačne, budeme ho nazývať **regulárny formálny ortogonálny polynóm** a  $t$  **regulárny index**.

Keďže FOP  $\varphi_t$  má splňovať (6.3), jeho koeficienty získame vyriešením sústavy

$$\begin{bmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{t-1} \\ s_1 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ s_{t-1} & \cdots & \cdots & s_{2t-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{0,t} \\ u_{1,t} \\ \vdots \\ u_{t-1,t} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} s_t \\ s_{t+1} \\ \vdots \\ s_{2t-1} \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

Regulárny FOP supňa  $t \geq 1$  bude existovať len vtedy, keď matica  $H_t$  bude regulárna.

**Veta 6.3.** *Pokiaľ je  $t \geq 1$  regulárny index, potom platí*

$$\varphi_t(z) = \frac{1}{\det H_t} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{t-1} & 1 \\ s_1 & & \ddots & \vdots & z \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ s_{t-1} & \cdots & \cdots & s_{2t-2} & z^{t-1} \\ s_t & \cdots & \cdots & s_{2t-1} & z^t \end{vmatrix}.$$

*Dôkaz.* Nech  $t$  je regulárny index. Potom funkcia  $\theta_t : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definovaná predpisom

$$\theta_t(z) := \frac{1}{\det H_t} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{t-1} & 1 \\ s_1 & & \ddots & \vdots & z \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ s_{t-1} & \cdots & \cdots & s_{2t-2} & z^{t-1} \\ s_t & \cdots & \cdots & s_{2t-1} & z^t \end{vmatrix},$$

je zrejme monický polynóm stupňa  $t$ . Pokiaľ polynóm  $\theta_t$  splňuje podmienky (6.3), potom keďže  $t$  je regulárny index (FOP  $\varphi_t$  je určený jednoznačne), musí platiť, že  $\theta_t = \varphi_t$ .

## 6 FORMÁLNE ORTOGONÁLNE POLYNÓMY

Pre každé  $k \in \{0, \dots, t-1\}$  platí

$$\begin{aligned}
 \langle \theta_t, z^k \rangle &= \left\langle \frac{1}{\det H_t} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{t-1} & 1 \\ s_1 & & \ddots & \vdots & z \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ s_{t-1} & \cdots & \cdots & s_{2t-2} & z^{t-1} \\ s_t & \cdots & \cdots & s_{2t-1} & z^t \end{vmatrix}, z^k \right\rangle = \\
 &= \frac{1}{\det H_t} \left\langle \sum_{j=0}^t (-1)^{t-j} z^j \begin{vmatrix} s_0 & \cdots & s_{j-1} & \cdots & s_{t-1} \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ s_{j-1} & \cdots & s_{t-1} & \cdots & s_{t+j-2} \\ s_{j+1} & \cdots & s_t & \cdots & s_{t+j} \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ s_t & \cdots & s_{t+j} & \cdots & s_{2t-1} \end{vmatrix}, z^k \right\rangle = \\
 &= \frac{1}{\det H_t} \sum_{j=0}^t (-1)^{t-j} \langle z^j, z^k \rangle \begin{vmatrix} s_0 & \cdots & s_{j-1} & \cdots & s_{t-1} \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ s_{j-1} & \cdots & s_{t-1} & \cdots & s_{t+j-2} \\ s_{j+1} & \cdots & s_t & \cdots & s_{t+j} \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ s_t & \cdots & s_{t+j} & \cdots & s_{2t-1} \end{vmatrix} = \\
 &= \frac{1}{\det H_t} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{t-1} & \langle 1, z^k \rangle \\ s_1 & & \ddots & \vdots & \langle z, z^k \rangle \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ s_{t-1} & \cdots & \cdots & s_{2t-2} & \langle z^{t-1}, z^k \rangle \\ s_t & \cdots & \cdots & s_{2t-1} & \langle z^t, z^k \rangle \end{vmatrix} = \frac{1}{\det H_t} \underbrace{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{t-1} & s_k \\ s_1 & & \ddots & \vdots & s_{k+1} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ s_{t-1} & \cdots & \cdots & s_{2t-2} & s_{k+t-1} \\ s_t & \cdots & \cdots & s_{2t-1} & s_{k+t} \end{vmatrix}}_{=0, \text{ pre } k \in \{0, \dots, t-1\}},
 \end{aligned}$$

čo znamená, že  $\theta_t$  splňuje podmienky (6.3). Preto  $\theta_t = \varphi_t$ . □

S využitím vety 6.3 a dá dokázať nasledujúca veta.

**Veta 6.4.** *Pokiaľ je  $t \geq 1$  regulárny index, potom platí*

$$\langle \varphi_t, \varphi_t \rangle = \frac{\det H_{t+1}}{\det H_t}.$$

*Dôkaz.* Keďže  $\varphi_t$  splňuje podmienky (6.3), platí

$$\langle \varphi_t, \varphi_t \rangle = \langle \varphi_t, z^t + u_{t-1,t} z^{t-1} + \cdots + u_{0,t} \rangle = \langle \varphi_t, z^t \rangle.$$



## 6 FORMÁLNE ORTOGONÁLNE POLYNÓMY

Keďže  $t$  je regulárny index, podľa vety 6.3 platí

$$\begin{aligned}
 \langle \varphi_t, z^t \rangle &= \left\langle \frac{1}{\det H_t} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{t-1} & 1 \\ s_1 & & \ddots & \vdots & z \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ s_{t-1} & \cdots & \cdots & s_{2t-2} & z^{t-1} \\ s_t & \cdots & \cdots & s_{2t-1} & z^t \end{vmatrix}, z^t \right\rangle = \\
 &= \frac{1}{\det H_t} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{t-1} & \langle 1, z^t \rangle \\ s_1 & & \ddots & \vdots & \langle z, z^t \rangle \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ s_{t-1} & \cdots & \cdots & s_{2t-2} & \langle z^{t-1}, z^t \rangle \\ s_t & \cdots & \cdots & s_{2t-1} & \langle z^t, z^t \rangle \end{vmatrix} = \\
 &= \frac{1}{\det H_t} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{t-1} & s_t \\ s_1 & & \ddots & \vdots & s_{t+1} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ s_{t-1} & \cdots & \cdots & s_{2t-2} & s_{2t-1} \\ s_t & \cdots & \cdots & s_{2t-1} & s_{2t} \end{vmatrix} = \frac{\det H_{t+1}}{\det H_t}.
 \end{aligned}$$

□

**Veta 6.5.** *Nech  $n$  je počet navzájom rôznych koreňov funkcie  $f$  vo vnútri danej krivky. Potom pre každé  $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  je hodnosť matice  $H_{n+p}$  rovná  $n$ .*

*Dôkaz.* Nech  $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $n$  je počet navzájom rôznych koreňov funkcie  $f$  v int  $\gamma$  a  $h$  je hodnosť matice  $H_{n+p}$ .

Matica  $H_{n+p}$  bude mať tvar

$$H_{n+p} = \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n+p-1} \\ s_1 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ s_{n+p-1} & \cdots & \cdots & s_{2n+2p-2} \end{bmatrix}.$$

Majme  $n$  vektorov  $\Upsilon_1, \dots, \Upsilon_n$  definovaných predpisom

$$\begin{aligned}
 \Upsilon_1 &:= [1, z_1, z_1^2, \dots, z_1^{n+p-1}] ; \\
 \Upsilon_2 &:= [1, z_2, z_2^2, \dots, z_2^{n+p-1}] ; \\
 &\vdots \\
 \Upsilon_n &:= [1, z_n, z_n^2, \dots, z_n^{n+p-1}] ,
 \end{aligned}$$

kde  $z_1, \dots, z_n$  sú navzájom rôzne korene  $f$  v int  $\gamma$ .

## 6 FORMÁLNE ORTOGONÁLNE POLYNÓMY

Každý riadok matice  $H_{n+p}$  sa dá vyjadriť lineárnou kombináciou vektorov  $\Upsilon_1, \dots, \Upsilon_n$ , preto  $h \leq n$ .

Nech  $D_n$  je diagonálna matica  $D_n := \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  a  $V_n$  je Vandermondova matica definovaná predpisom

$$V_n := \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n \\ \vdots & & & \vdots \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & \dots & z_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Maticu  $H_n$  môžeme rozložiť na tvar

$$H_n = V_n D_n V_n^T.$$

Matice  $D_n, V_n$  sú regulárne, preto  $H_n$  je taktiež regulárna a jej hodnosť je  $n$ .  $H_n$  je submatice matice  $H_{n+p}$ , preto  $h \geq n$ .

Dokázali sme, že hodnosť matice  $H_{n+p}$  je  $n$ . □

**Definícia 6.6.** Nech  $A, B$  sú štvorcové matice. Vlastným číslom dvojice  $(A, B)$  nazveme také  $\lambda \in \mathbb{C}$ , pre ktoré je splnená rovnosť

$$\det(A - \lambda B) = 0.$$

Vlastným vektorom dvojice  $(A, B)$  odpovedajúcemu vlastnému číslu  $\lambda$  nazveme nenulový vektor  $x$ , pre ktorý platí

$$(A - \lambda B)x = 0.$$

(Pripomeňme, že pokiaľ  $B = E$ , číslo  $\lambda$  je vlastné číslo matice  $A$  a  $x$  jeho odpovedajúci vlastný vektor).

**Veta 6.7.** Nech  $t \geq 1$  je regulárny index. Korene regulárneho FOP  $\varphi_t$  stupňa  $t$  sú vlastné čísla dvojice  $(H_t^{(1)}, H_t)$ .

*Dôkaz.* Nech

$$\varphi_t(z) = u_{0,t} + u_{1,t}z + \dots + u_{t-1,t}z^{t-1} + z^t.$$

Definujme  $C_t \in \mathbb{C}^{t \times t}$  predpisom

$$C_t := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -u_{0,t} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -u_{1,t} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & -u_{t-2,t} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -u_{t-1,t} \end{bmatrix}.$$

## 6 FORMÁLNE ORTOGONÁLNE POLYNÓMY

Korene polynómu  $\varphi_t$  sú práve vlastné čísla matice  $C_t$  ( $\det(C_t - \lambda E) = (-1)^t \varphi_t(\lambda)$ ).

Nech  $\lambda$  je vlastné číslo matice  $C_t$  a  $x$  jeho odpovedajúci vlastný vektor. Keďže  $H_t$  je regulárna, platí

$$C_t x = \lambda x \Leftrightarrow H_t C_t x = \lambda H_t x.$$

S využitím (6.4) platí  $H_t C_t = H_t^{(1)}$ , čo vetu dokazuje.  $\square$

**Veta 6.8.** Nech  $z_1, \dots, z_n$  sú korene FOP  $\varphi_n$  a nech  $t \geq n$ . Potom vlastné čísla dvojice  $(H_t^{(1)}, H_t)$  sú  $z_1, \dots, z_n$  a o zvyšných vlastných číslach (bude ich  $t - n$ ) nemáme žiadnu informáciu.

Korene polynómu  $\varphi_n$  ( $n$  je počet navzájom rôznych koreňov  $f$  v int  $\gamma$ ,  $n$  je regulárny index) získame podľa vety 6.7 spočítaním vlastných čísel dvojice  $(H_n^{(1)}, H_n)$ . Príslušné násobnosti k týmto koreňom, získame riešením sústavy

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & \cdots & z_n \\ \vdots & & \vdots \\ z_1^{n-1} & \cdots & z_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (6.5)$$

Veta 6.7 a 6.5 nám dáva možný prístup ako určiť  $n$  a  $z_1, \dots, z_n$ . Začneme určením  $N$ , čo je počet koreňov vrátane násobností. Túto hodnotu udáva  $s_0 = \langle 1, 1 \rangle$ , ktorú určíme pomocou numerickej integrácie. Spočítame momenty  $s_1, \dots, s_{2N-2}$  taktiež pomocou numerickej integrácie. Počet navzájom rôznych koreňov  $n$  je určený hodnotou matice  $H_N$ . Vlastné čísla dvojice  $(H_N^{(1)}, H_N)$  budú hľadané korene  $z_1, \dots, z_n$ . Tento prístup má však nevýhody:

- Teoreticky,  $N - n$  vlastných čísel matice  $H_N$  je rovných nule (pretože hodnota matice  $H_N = n$  je počet nenulových vlastných čísel matice  $H_N$ ). Prvky matice  $H_N$ , teda  $s_k = \langle 1, z^k \rangle$ , kde  $k = 0, \dots, 2N - 2$  získame numerickou integráciou. V praxi je náročné určiť hodnotu  $H_N$  v prípade, že rozdiel aproximácie nulových vlastných čísel a aproximácie nenulových vlastných čísel matice  $H_N$  je veľmi malý.
- Aproximácia koreňov  $z_1, \dots, z_n$  (získaných ako vlastné čísla dvojice  $(H_n^{(1)}, H_n)$ ) nemusí byť veľmi presná. Problém hľadania koreňov ako vlastných čísel dvojice  $(H_n^{(1)}, H_n)$  je zvyčajne zle podmienený (čím viac navzájom rôznych koreňov má  $f$ , tým je „horšie“ podmienený).

Ilustrujme túto „zlú“ podmienenosť na príkladoch.

**Príklad 4.** Majme funkciu

$$f(z) = (z - 1)^{10}(z - 5)^5.$$

Táto funkcia má koreň  $z_1 = 1$  a jeho násobnosť je  $\alpha_1 = 10$  a koreň  $z_2 = 5$  s násobnosťou  $\alpha_2 = 5$  (korene uvažujeme v kruhu so stredom v počiatku a s polomerom 6).

Prepokladajme, že poznáme  $n$  (počet navzájom rôznych koreňov), teda  $n = 2$ .



## 6 FORMÁLNE ORTOGONÁLNE POLYNÓMY

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= +1.002554928572545297606771 & +2.358414110534818868983915 \cdot 10^{-15}i; \\
\alpha_2 &= +0.006031219444170753308798 & -0.009574777905260159694599i; \\
\alpha_3 &= +0.006031219444191806273387 & +0.009574777905375656379521i; \\
\alpha_4 &= +0.021388380737484570211877 & -1.710785618522756750517458 \cdot 10^{-13}i; \\
\alpha_5 &= +1.601888245355230055461658 & +0.600377383932591845460598 \cdot 10^{-14}i; \\
\alpha_6 &= +1.751075501467918821641160 & -1.118076372902122342334657 \cdot 10^{-13}i; \\
\alpha_7 &= +1.713254633528743564984151 & +1.470044113859738384874495 \cdot 10^{-13}i; \\
\alpha_8 &= +1.549297282691785059803322 & -7.446613044061553690997540 \cdot 10^{-14}i; \\
\alpha_9 &= +1.062954313068195836816857 & -1.133589937963106993678142 \cdot 10^{-14}i; \\
\alpha_{10} &= +1.285524893844973010022738 & +4.782494470516398424542662 \cdot 10^{-14}i.
\end{aligned}$$

Môžeme si všimnúť, že aproximácia niektorých koreňov je dosť nepresná. V porovnaní s metódou Newtonových súm (viď príklad 2) nedostaneme lepšiu aproximáciu koreňov.

Ďalším cieľom tejto kapitoly bude predstaviť algoritmus, ktorý dáva lepšiu aproximáciu hľadaných koreňov.

Neznáme korene funkcie  $f$ , počet navzájom rôznych koreňov s príslušnými násobnosťami teda  $n, z_1, \dots, z_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  môžeme vypočítať pomocou formy  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , ktorá obsahuje ľubovoľné polynómy.

Nech  $\psi_k$  je ľubovoľný monický polynóm stupňa  $k$ , kde  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Pripomeňme, že

$$\langle \psi_p, \psi_q \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \psi_p(z) \psi_q(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^n \alpha_i \psi_p(z_i) \psi_q(z_i),$$

pre  $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Nech  $M_k \in \mathbb{C}^{k \times k}$  je Gramova matica definovaná predpisom  $M_k := [\langle \psi_p, \psi_q \rangle]_{p,q=0}^{k-1}$ , teda

$$M_k = \begin{bmatrix} \langle \psi_0, \psi_0 \rangle & \cdots & \langle \psi_0, \psi_{k-1} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \psi_{k-1}, \psi_0 \rangle & \cdots & \langle \psi_{k-1}, \psi_{k-1} \rangle \end{bmatrix},$$

a matica  $M_k^{(1)} \in \mathbb{C}^{k \times k}$  je definovaná predpisom  $M_k^{(1)} := [\langle \psi_p, \psi_1 \psi_q \rangle]_{p,q=0}^{k-1}$ , teda

$$M_k^{(1)} = \begin{bmatrix} \langle \psi_0, \psi_1 \psi_0 \rangle & \cdots & \langle \psi_0, \psi_1 \psi_{k-1} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \psi_{k-1}, \psi_1 \psi_0 \rangle & \cdots & \langle \psi_{k-1}, \psi_1 \psi_{k-1} \rangle \end{bmatrix}.$$

Definujme polynóm  $\varphi_n$  stupňa  $n$

$$\varphi_n(z) := \psi_n(z) + \sigma_{n-1} \psi_{n-1}(z) + \cdots + \sigma_0 \psi_0(z).$$

Chceme, aby tento polynóm mal rovnaké korene ako funkcia  $f$ . Pre takýto polynóm musí platiť

$$\langle \psi_k, \varphi_n \rangle = 0, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (6.6)$$

## 6 FORMÁLNE ORTOGONÁLNE POLYNÓMY

Vzhľadom k podmienke (6.6), koeficienty polynómu  $\varphi_n$  získame riešením sústavy

$$\begin{bmatrix} \langle \psi_0, \psi_0 \rangle & \cdots & \langle \psi_0, \psi_{n-1} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \psi_{n-1}, \psi_0 \rangle & \cdots & \langle \psi_{n-1}, \psi_{n-1} \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_0 \\ \vdots \\ \sigma_{n-1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \langle \psi_0, \psi_n \rangle \\ \vdots \\ \langle \psi_{n-1}, \psi_n \rangle \end{bmatrix}.$$

Nasledujúca veta zovšeobecňuje vetu 6.5.

**Veta 6.9.** *Nech  $n$  je počet navzájom rôznych koreňov funkcie  $f$  vo vnútri danej krivky. Potom pre každé  $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  je hodnota matice  $M_{n+p}$  rovná  $n$ .*

Vzhľadom k vete 6.9 polynóm  $\varphi_n$  bude mať tvar

$$\varphi_n(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n).$$

Poznamenajme, že v prípade keby  $\psi_k(z) = z^k$  pre  $k = 0, \dots, n-1$ , koeficienty polynómu  $\varphi_n$  získame riešením sústavy

$$\begin{bmatrix} \langle 1, 1 \rangle & \cdots & \langle 1, z^{n-1} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle z^{n-1}, 1 \rangle & \cdots & \langle z^{n-1}, z^{n-1} \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_0 \\ \vdots \\ \sigma_{n-1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \langle 1, z^n \rangle \\ \vdots \\ \langle z^{n-1}, z^n \rangle \end{bmatrix},$$

čo odpovedá sústave

$$\begin{bmatrix} s_0 & \cdots & s_{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & \cdots & s_{2n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_0 \\ \vdots \\ \sigma_{n-1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} s_n \\ \vdots \\ s_{2n-1} \end{bmatrix}.$$

Keďže korene polynómu  $\varphi_n$  poznáme, násobnosti týchto získame riešením sústavy

$$\begin{bmatrix} \psi_0(z_1) & \cdots & \psi_0(z_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_{n-1}(z_1) & \cdots & \psi_{n-1}(z_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \psi_0, \psi_0 \rangle \\ \vdots \\ \langle \psi_{n-1}, \psi_0 \rangle \end{bmatrix}. \quad (6.7)$$

**Veta 6.10.** *Nech  $t \in \mathbb{N}$ . Potom  $\lambda^*$  je vlastné číslo dvojice  $(H_t^{(1)}, H_t)$  práve vtedy keď  $\psi_1(\lambda^*)$  je vlastné číslo dvojice  $(M_t^{(1)}, M_t)$ .*

*Dôkaz.* Nech  $\psi_k = z^k + u_{k-1,k}z^{k-1} + \cdots + u_{0,k}$ , kde  $u_{k-1,k}, \dots, u_{0,k} \in \mathbb{C}$ .

Definujme maticu  $A_t \in \mathbb{C}^{t \times t}$

$$A_t := \begin{bmatrix} 1 & u_{0,1} & \cdots & \cdots & u_{0,t-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & u_{t-2,t-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

## 6 FORMÁLNE ORTOGONÁLNE POLYNÓMY

kde  $u_{i,j}$  sú koeficienty polynómu  $\psi_j$ , pre  $j = 1, \dots, t-1$ ,  $i = 0, \dots, j-1$ .

Matice  $M_t = [\langle \psi_p, \psi_q \rangle]_{p,q=0}^{t-1}$  a  $[\langle \psi_p, z\psi_q \rangle]_{p,q=0}^{t-1}$  môžeme rozložiť

$$M_t = A_t^T H_t A_t, \quad [\langle \psi_p, z\psi_q \rangle]_{p,q=0}^{t-1} = A_t^T H_t^{(1)} A_t.$$

Nech  $\psi_1(z) = z - \beta$  ( $\beta = -u_{0,1}$ ). Potom platí

$$\begin{aligned} M_t^{(1)} &= [\langle \psi_p, (z - \beta)\psi_q \rangle]_{p,q=0}^{t-1} = [\langle \psi_p, z\psi_q \rangle]_{p,q=0}^{t-1} - [\langle \psi_p, \beta\psi_q \rangle]_{p,q=0}^{t-1} = \\ &= A_t^T H_t^{(1)} A_t - \beta M_t = A_t^T (H_t^{(1)} - \beta H_t) A_t. \end{aligned}$$

Nech  $\lambda^*$  je vlastné číslo dvojice  $(H_t^{(1)}, H_t)$ ,  $x$  je odpovedajúci vlastný vektor a keďže  $A_t$  je regulárna, nech  $y = A_t^{-1}x$ . Vektory  $x, y$  sú nenulové, platí

$$\begin{aligned} H_t^{(1)}x &= \lambda^* H_t x \Leftrightarrow (H_t^{(1)} - \beta H_t)x = (\lambda^* - \beta)H_t x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow A_t^T (H_t^{(1)} - \beta H_t) A_t y = \psi_1(\lambda^*) A_t^T H_t A_t y \Leftrightarrow M_t^{(1)}y = \psi_1(\lambda^*) M_t y. \end{aligned}$$

Z čoho plynie, že  $\psi_1(\lambda^*)$  je vlastné číslo dvojice  $(M_t^{(1)}, M_t)$ . □

Z vety 6.10 a 6.7 plynie, že korene regulárneho FOP  $\varphi_n$  sa dajú získať pomocou vlastných čísel dvojice  $(M_n^{(1)}, M_n)$ , kde prvky matice  $M_n^{(1)}$  a  $M_n$  sú  $\langle \psi_p, \psi_k \rangle$ , kde  $p, q = 0, \dots, n-1$ .

Otázkou však zostáva, ako voliť polynómy  $\psi_k$ , kde  $k = 0, \dots, n-1$ , aby sme dosiahli najlepšiu aproximáciu hľadaných koreňov. Pokiaľ  $\psi_k$  volíme ako  $\psi_k(z) = z^k$ , problém hľadania koreňov, ako sme ukázali, bude zle podmienený. Pokiaľ budeme voliť polynómy  $\psi_k$  ako formálne ortogonálne polynómy, neskôr ukážeme, že dostaneme veľmi presnú aproximáciu koreňov. Predstavme si ešte ďalšie vlastnosti FOP.

V prípade, že  $H_n$  je silno regulárna, čo znamená, že všetky matice  $H_1, \dots, H_n$  sú regulárne (tieto matice nazveme bloky matice  $H_n$ ), všetky FOP  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$  budú regulárne. Definujme Gramovu maticu  $G_n$  predpisom

$$G_n := [\langle \varphi_p, \varphi_q \rangle]_{p,q=0}^{n-1} = \begin{bmatrix} \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle & \cdots & \langle \varphi_0, \varphi_{n-1} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \varphi_{n-1}, \varphi_0 \rangle & \cdots & \langle \varphi_{n-1}, \varphi_{n-1} \rangle \end{bmatrix}.$$

V prípade, že  $H_n$  je silno regulárna, matica  $G_n$  bude diagonálna, pretože vzhľadom k (6.3) platí

$$\langle \varphi_k, \varphi_t \rangle = \langle \varphi_t, \varphi_k \rangle = \langle \varphi_t, z^k + z^{k-1}u_{k-1,k} + \dots + u_{0,k} \rangle = 0,$$

pre  $t = 0, \dots, n-1$  a  $k = 0, \dots, t-1$ . Tzn.  $G_n$  bude mať v prípade, že  $H_n$  je silno regulárna tvar

$$G_n = \begin{bmatrix} \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \langle \varphi_{n-2}, \varphi_{n-2} \rangle & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \langle \varphi_{n-1}, \varphi_{n-1} \rangle \end{bmatrix}.$$

## 6 FORMÁLNE ORTOGONÁLNE POLYNÓMY

Definujme maticu  $G_n^{(1)}$  predpisom

$$G_n^{(1)} := [\langle \varphi_p, \varphi_1 \varphi_q \rangle]_{p,q=0}^{n-1} = \begin{bmatrix} \langle \varphi_0, \varphi_1 \varphi_0 \rangle & \cdots & \langle \varphi_0, \varphi_1 \varphi_{n-1} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \varphi_{n-1}, \varphi_1 \varphi_0 \rangle & \cdots & \langle \varphi_{n-1}, \varphi_1 \varphi_{n-1} \rangle \end{bmatrix}.$$

V prípade, že  $H_n$  je silno regulárna, matica  $G_n^{(1)}$  bude tridiagonálna, pretože vzhľadom k (6.3) platí

$$\begin{aligned} \langle \varphi_1 \varphi_k, \varphi_t \rangle &= \langle \varphi_t, \varphi_1 \varphi_k \rangle = \left\langle \varphi_t, (z + u_{0,1})(z^k + z^{k-1}u_{k-1,k} + \dots + u_{0,k}) \right\rangle = \\ &= \left\langle \varphi_t, z^{k+1} + z^k(u_{k-1,k} + u_{0,1}) + \dots + u_{0,1}u_{0,k} \right\rangle = 0, \end{aligned}$$

pre  $t = 0, \dots, n-1$  a  $k = 0, \dots, t-2$ . Tzn.  $G_n^{(1)}$  bude mať v prípade, že  $H_n$  je silno regulárna tvar

$$G_n^{(1)} = \begin{bmatrix} \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle & \langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle & 0 & \cdots & 0 \\ \langle \varphi_1, \varphi_0 \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \langle \varphi_{n-2}, \varphi_{n-3} \rangle & \langle \varphi_{n-2}, \varphi_{n-2} \rangle & \langle \varphi_{n-2}, \varphi_{n-1} \rangle \\ 0 & \cdots & 0 & \langle \varphi_{n-1}, \varphi_{n-2} \rangle & \langle \varphi_{n-1}, \varphi_{n-1} \rangle \end{bmatrix}.$$

V prípade, že  $H_n$  nebude silno regulárna, vytvorme množinu regulárnych indexov  $\{i_k\}$ ,  $k = 0, \dots, K$ , kde  $K$  je počet regulárnych blokov matice  $H_n$  (to znamená, počet regulárnych matic v množine  $\{H_1, \dots, H_n\}$ ). Pokiaľ  $n \geq 1$ , polynómy  $\varphi_0(z) = 1$  a  $\varphi_1(z) = z - \mu$ , kde  $\mu = \frac{s_1}{s_0}$  ( $\mu$  je aritmetický priemer koreňov), budú regulárne a  $\varphi_n$  bude vzhľadom k vete 6.5 posledný regulárny polynóm. Preto platí  $i_0 = 0, i_1 = 1$  a  $i_K = n$ .

Definujme postupnosť  $\{\varphi_t\}_{t=0}^\infty$  tak, že pokiaľ  $t$  je regulárny index,  $\varphi_t$  bude regulárny FOP (určený jednoznačne) a pokiaľ  $t$  nie je regulárny index,  $\varphi_t(z) = z^{t-r} \varphi_r(z)$ , kde  $r$  bude najväčší regulárny index menší ako  $t$ . V prípade, že  $t$  nie je regulárny index, budeme  $\varphi_t$  nazývať **vnútorný polynóm**. Takto vytvorené polynómy môžeme rozdeliť do blokov tak, že každý blok bude začínať regulárnym polynómom a zvyšné polynómy v danom bloku budú vnútorné

$$\begin{aligned} \Theta^{(0)} &:= [\varphi_0] \\ \Theta^{(1)} &:= [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \cdots \ \varphi_{i_2-1}] \\ \Theta^{(2)} &:= [\varphi_{i_2} \ \varphi_{i_2+1} \ \cdots \ \varphi_{i_3-1}] \\ &\vdots \\ \Theta^{(K-1)} &:= [\varphi_{i_{K-1}} \ \varphi_{i_{K-1}+1} \ \cdots \ \varphi_{i_K-1}] \\ \Theta^{(K)} &:= [\varphi_n \ \varphi_{n+1} \ \cdots]. \end{aligned}$$



## 6 FORMÁLNE ORTOGONÁLNE POLYNÓMY

Položme pre každý  $p$ -tý blok dĺžku bloku  $l_p := i_{p+1} - i_p$ , kde  $p = 0, \dots, K - 1$  a nech

$$\langle \Phi, \Psi \rangle := \begin{bmatrix} \langle \phi_0, \psi_0 \rangle & \cdots & \langle \phi_0, \psi_q \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \phi_p, \psi_0 \rangle & \cdots & \langle \phi_p, \psi_q \rangle \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(p+1) \times (q+1)}$$

pre každé dva vektory

$$\Phi := [\phi_0 \ \phi_1 \ \cdots \ \phi_p] \quad \Psi := [\psi_0 \ \psi_1 \ \cdots \ \psi_q].$$

Nasledujúca veta popisuje štruktúru  $G_n$  v prípade, že  $H_n$  nie je silno regulárna.

**Veta 6.11.**

$$\langle \Theta^{(p)}, \Theta^{(q)} \rangle = \begin{cases} 0_{l_p \times l_q} & \text{ak } p \neq q \\ \delta_p & \text{ak } p = q \end{cases} \quad \text{pre } p, q = 0, \dots, K - 1,$$

kde matica  $\delta_p \in \mathbb{C}^{l_p \times l_p}$  je regulárna, symetrická, nulová nad vedľajšou diagonálou a na vedľajšej diagonále rovná  $\langle z^{i_p + l_p - 1}, \varphi_{i_p} \rangle$ , kde  $p = 0, \dots, K - 1$ .  $\delta_p$  bude mať Hankelovu štruktúru.

*Dôkaz.* Vetu dokážeme pomocou indukcie vzhľadom k  $\max\{p, q\}$ . Pre nultý blok, teda  $\Theta^{(0)} = [\varphi_0]$  platí

$$\langle \Theta^{(0)}, \Theta^{(0)} \rangle = [\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle] = [\langle 1, 1 \rangle] = [s_0] = \delta_0.$$

$\delta_0$  je splňuje požadované vlastnosti. Prepokladajme, že veta platí pre  $p, q = 0, 1, \dots, k - 1$ , kde  $k \in \{1, \dots, K - 1\}$ . Označme prvý polynóm v bloku  $\Theta^{(k)}$  ako  $\varphi_r$  a dĺžku toho bloku  $l$ , tzn.

$$\Theta^{(k)} = [\varphi_r \ \varphi_{r+1} \ \cdots \ \varphi_{r+l-1}] = [\varphi_r \ z\varphi_r \ \cdots \ z^{l-1}\varphi_r].$$

Keďže polynóm  $\varphi_r$  je regulárny a zvyšné polynómy v danom bloku sú vnútorné, matice  $H_r$  a  $H_{r+l}$  sú regulárne a matice  $H_{r+1}, H_{r+2}, \dots, H_{r+l-1}$  sú singulárne. Cieľom je dokázať, že

$$L := \begin{bmatrix} \langle \varphi_0, \varphi_r \rangle & \langle \varphi_0, z\varphi_r \rangle & \cdots & \langle \varphi_0, z^{l-1}\varphi_r \rangle \\ \langle \varphi_1, \varphi_r \rangle & \langle \varphi_1, z\varphi_r \rangle & \cdots & \langle \varphi_1, z^{l-1}\varphi_r \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \varphi_{r-1}, \varphi_r \rangle & \langle \varphi_{r-1}, z\varphi_r \rangle & \cdots & \langle \varphi_{r-1}, z^{l-1}\varphi_r \rangle \end{bmatrix} = 0_{r \times l}.$$

a

$$\delta := \begin{bmatrix} \langle \varphi_r, \varphi_r \rangle & \langle \varphi_r, z\varphi_r \rangle & \cdots & \langle \varphi_r, z^{l-1}\varphi_r \rangle \\ \langle z\varphi_r, \varphi_r \rangle & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \langle z^{l-1}\varphi_r, \varphi_r \rangle & \cdots & \cdots & \langle z^{l-1}\varphi_r, z^{l-1}\varphi_r \rangle \end{bmatrix}$$

je regulárna a má vyššie uvedené vlastnosti.  $\delta$  bude mať Hankelovu štruktúru (plynie to zo symetričnosti  $\delta$  a z vlastnosti, že pre ľubovoľné dva polynómy  $\psi, \phi$  platí  $\langle \psi, z\phi \rangle = \langle z\psi, \phi \rangle$ ).

## 6 FORMÁLNE ORTOGONÁLNE POLYNÓMY

Ked'že  $\varphi_r$  je regulárny FOP, z (6.3) plynie

$$\langle \varphi_s, z^t \varphi_r \rangle = \langle z^t \varphi_s, \varphi_r \rangle = 0, \quad \text{pre } t + s < r.$$

Inými slovami, polynóm  $\varphi_r$  je kolmý na všetky polynómy stupňa menšieho ako  $r$ . Z toho plynie, že matica  $L$  bude mať

$$L = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \langle \varphi_{r-l+1}, z^{l-1} \varphi_r \rangle^\times \\ \vdots & & & \times & \langle \varphi_{r-l+2}, z^{l-1} \varphi_r \rangle^\otimes \\ \vdots & & \times & \otimes & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \langle \varphi_{r-1}, z \varphi_r \rangle^\times & \langle \varphi_{r-1}, z^2 \varphi_r \rangle^\otimes & \cdots & \langle \varphi_{r-1}, z^{l-1} \varphi_r \rangle^* \end{bmatrix}.$$

Ked'že  $\varphi_r$  je kolmý na všetky polynómy stupňa menšieho ako  $r$ , tzn.  $\langle \varphi_t, \varphi_r \rangle = 0$ , pre  $t < r$  platí

$$\langle \varphi_{r-1}, z \varphi_r \rangle = \langle \varphi_{r-2}, z^2 \varphi_r \rangle = \cdots = \langle \varphi_{r-l+1}, z^{l-1} \varphi_r \rangle = \langle z^r, \varphi_r \rangle = \langle \varphi_r, \varphi_r \rangle. \quad (6.8)$$

Ked'že matica  $H_{r+1}$  je singulárna a platí  $\langle \varphi_r, \varphi_r \rangle = \frac{\det H_{r+1}}{\det H_r}$  musí platiť, že  $\langle \varphi_r, \varphi_r \rangle = 0$ . Prvok  $\langle \varphi_r, \varphi_r \rangle = 0$  je prvý prvok matice  $\delta$  a ked'že platí (6.8), je tomuto prvku, teda nule rovná prvá „antidiagonála“ matice  $L$  (teda „antidiagonála“, ktorá obsahuje prvky označené znakom  $\times$ ). Polynóm  $\varphi_r$  je teda kolmý na všetky polynómy stupňa menšieho ako  $r + 1$ , preto platí

$$\langle \varphi_{r-1}, z^2 \varphi_r \rangle = \langle \varphi_{r-2}, z^3 \varphi_r \rangle = \cdots = \langle \varphi_{r-l+2}, z^{l-1} \varphi_r \rangle = \langle z^{r+1}, \varphi_r \rangle = \langle z \varphi_r, \varphi_r \rangle. \quad (6.9)$$

Definujme maticu  $R_r$

$$R_r := \begin{bmatrix} 1 & u_{0,1} & \cdots & \cdots & u_{0,r-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & u_{r-2,r-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.10)$$

## 6 FORMÁLNE ORTOGONÁLNE POLYNÓMY

kde  $u_{i,j}$  sú koeficienty polynómu  $\varphi_j$ ,  $j = 1, \dots, r-1$ ,  $i = 0, \dots, j-1$ . Dá sa ukázať, že platí

$$R_{r+2}^T H_{r+2} R_{r+2} = [\langle \varphi_p, \varphi_q \rangle]_{p,q=0}^{r+1} = G_{r+2} =$$

$$= \begin{bmatrix} \delta_0 & & & & & \\ & \delta_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \delta_{k-1} & & \\ & & & & 0 & \langle z^{r+1}, \varphi_r \rangle \\ & & & & \langle z^{r+1}, \varphi_r \rangle & \langle z\varphi_r, z\varphi_r \rangle \end{bmatrix}. \quad (6.11)$$

Keďže matica  $H_{r+2}$  je singulárna, z predpokladu  $\delta_0, \dots, \delta_{k-1}$  sú regulárne a platí (6.11), potom musí platiť  $\langle z^{r+1}, \varphi_r \rangle = 0$ . Tomu to prvku je vzhľadom k (6.9) rovný druhý prvok prvého stĺpca a prvý prvok druhého stĺpca matice  $\delta$  a zároveň celá druhá „antidiagonála“ matice  $L$  (teda „antidiagonála“, ktorá obsahuje prvky označené znakom  $\otimes$ ).

Polynóm  $\varphi_r$  je kolmý na všetky polynómy stupňa menšieho ako  $r+2$ . Podobne pokračujeme ďalej, zistíme, keďže  $H_{r+3}, \dots, H_{r+l-1}$  sú singulárne,  $H_{r+l}$  je regulárna, že platí

$$\langle z^{r+2}, \varphi_r \rangle = \langle z^{r+3}, \varphi_r \rangle = \langle z^{r+l-2}, \varphi_r \rangle = 0.$$

Prvok  $\langle z^{r+l-2}, \varphi_r \rangle$  teda nula, je rovná prvku označeného znakom  $*$  v matici  $L$  a prvkom na prvej vedľajšej diagonále matice  $\delta$  (to je diagonála nachádzajúca sa tesne nad vedľajšou diagonálou). Polynóm  $\varphi_r$  je kolmý na všetky polynómy stupňa menšieho ako  $r+l-1$ , bude platiť

$$\langle z^{l-1} \varphi_r, \varphi_r \rangle = \langle z^{l-2} \varphi_r, z\varphi_r \rangle = \dots = \langle \varphi_r, z^{l-1} \varphi_r \rangle = \langle z^{r+l-1}, \varphi_r \rangle \neq 0.$$

Teda prvky na vedľajšej diagonále matice  $\delta$  budú rovné  $\langle z^{r+l-1}, \varphi_r \rangle$ . Matica  $\delta$  bude regulárna, čo plynie z toho, že  $H_{r+l}$  je regulárna.  $\square$

Poznamenajme, že v prípade, keď  $H_n$  nebude silno regulárna, matica  $G_n = [\langle \varphi_p, \varphi_q \rangle]_{p,q=0}^{n-1}$  bude regulárna a blokovo diagonálna,  $G_n = \text{diag}(\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{K-1})$ .

**Poznámka 6.12.** Maticu  $A = [a_{p,q}]_{p,q=0}^{l-1} \in \mathbb{C}^{l \times l}$  budeme nazývať dolná anti-Hessenbergova matica, pokiaľ  $a_{p,q} = 0$ , pre  $p+q < l-2$ .

Nasledujúca veta popisuje štruktúru  $G_n^{(1)}$  v prípade, že  $H_n$  nie je silno regulárna.

**Veta 6.13.**

$$\langle \Theta^{(p)}, \varphi_1 \Theta^{(q)} \rangle = \begin{cases} 0_{l_p \times l_q} & ak & |p-q| > 1 \\ \varrho_p & ak & p = q+1 \\ \varrho_p^T & ak & p = q-1 \\ \delta_p^{(1)} & ak & p = q \end{cases} \quad pre \quad p, q = 0, \dots, K-1,$$

## 6 FORMÁLNE ORTOGONÁLNE POLYNÓMY

kde matica  $\delta_p^{(1)} \in \mathbb{C}^{l_p \times l_p}$  je symetrická, dolná anti-Hessenbergova matica, na prvej nenulovej vedľajšej diagonále rovná  $\langle z^{i_p+l_p-1}, \varphi_{i_p} \rangle$ , kde  $p = 0, \dots, K-1$ .  $\delta_p^{(1)}$  má Hankelovu štruktúru.  $\delta_0^{(1)} = 0$ . Prvky matice  $\varrho_p$ , kde  $p = 1, \dots, K-1$  sú nulové okrem prvkov v pravom dolnom rohu, ktoré sú rovné  $\langle z^{i_p+l_p-1}, \varphi_{i_p} \rangle$ .

Matica  $G_n^{(1)} = [\langle \varphi_p, \varphi_1 \varphi_q \rangle]_{p,q=0}^{n-1}$  bude blokovo tridiagonálna a bude mať tvar

$$G_n^{(1)} := \begin{bmatrix} \delta_0^{(1)} & \varrho_1^T & & & \\ \varrho_1 & \delta_1^{(1)} & \varrho_2^T & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \varrho_{I-2} & \delta_{I-2}^{(1)} & \varrho_{I-1}^T \\ & & & \varrho_{I-1} & \delta_{I-1}^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Napríklad, pre  $n = 10$  a bloky

$$\begin{aligned} \Theta^{(0)} &= [\varphi_0] \\ \Theta^{(1)} &= [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \varphi_3 \ \varphi_4] \\ \Theta^{(2)} &= [\varphi_5 \ \varphi_6 \ \varphi_7] \\ \Theta^{(3)} &= [\varphi_8 \ \varphi_9] \end{aligned}$$

budú mať matice  $G_n$  a  $G_n^{(1)}$  tvar

$$G_n = \begin{bmatrix} \odot & & & & & & & & & \\ & 0 & 0 & 0 & \odot & & & & & \\ & 0 & 0 & \odot & \oplus & & & & & \\ & 0 & \odot & \oplus & \oplus & & & & & \\ & \odot & \oplus & \oplus & \oplus & & & & & \\ & & & & & 0 & 0 & \odot & & \\ & & & & & 0 & \odot & \oplus & & \\ & & & & & \odot & \oplus & \oplus & & \\ & & & & & & & & 0 & \odot \\ & & & & & & & & \odot & \oplus \end{bmatrix},$$

$$G_n^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & & \\ & 0 & 0 & \odot & \oplus & & & & & \\ & 0 & \odot & \oplus & \oplus & & & & & \\ & \odot & \oplus & \oplus & \oplus & & & & & \\ \odot & \oplus & \oplus & \oplus & \oplus & & & & & \\ & & & & & 0 & \odot & \oplus & & \\ & & & & & \odot & \oplus & \oplus & & \\ & & & & & \odot & \oplus & \oplus & & \\ & & & & & & & & \odot & \oplus \\ & & & & & & & & \odot & \oplus \end{bmatrix}.$$

## 6 FORMÁLNE ORTOGONÁLNE POLYNÓMY

Prvky označené  $\odot$  sú nenulové a v každom bloku rovnaké.

Z vety 6.7 a 6.10 (matica  $M_t$  bude mať tvar  $G_t$  a matica  $M_t^{(1)}$  bude mať tvar  $G_t^{(1)}$ ) plynie, že pokiaľ  $t \geq 1$  je regulárny index a  $z_1, \dots, z_t$  sú korene  $\varphi_t$ , potom vlastné čísla dvojice  $(G_t^{(1)}, G_t)$  sú  $z_1 - \mu, \dots, z_t - \mu$ , kde  $\mu = \frac{s_1}{s_0}$  je aritmetický priemer koreňov. Obzvlášť, vlastné čísla dvojice  $(G_n^{(1)}, G_n)$  sú  $z_1 - \mu, \dots, z_n - \mu$ .

**Veta 6.14.** *Nech  $k \in \mathbb{N}$ . Potom  $\det G_k = \det H_k$  a  $\det G_k^{(1)} = \det (H_k^{(1)} - \mu H_k)$ , kde  $\mu = \frac{s_1}{s_0}$  je aritmetický priemer koreňov.*

*Dôkaz.* Nech  $R_k \in \mathbb{C}^{k \times k}$  je definovaná podľa (6.10). Potom ako už bolo spomenuté  $G_k$  sa dá rozložiť ako

$$G_k = R_k^T H_k R_k.$$

Keďže  $R_k$  je horná trojuholníková matica s jednotkovými prvkami na diagonále, platí  $\det R_k = \det R_k^T = 1$ . Preto platí

$$\det G_k = \det H_k.$$

Keďže  $\varphi_1(z) = z - \mu$  ( $\mu$  je aritmetický priemer koreňov), platí

$$G_k^{(1)} = [\langle \varphi_p, z\varphi_q \rangle]_{p,q=0}^{k-1} - [\langle \varphi_p, \mu\varphi_q \rangle]_{p,q=0}^{k-1} = [\langle \varphi_p, z\varphi_q \rangle]_{p,q=0}^{k-1} - \mu G_k.$$

Matica  $[\langle \varphi_p, z\varphi_q \rangle]_{p,q=0}^{k-1}$  sa dá (podobne ako  $G_k$ ) rozložiť

$$[\langle \varphi_p, z\varphi_q \rangle]_{p,q=0}^{k-1} = R_k^T H_k^{(1)} R_k,$$

a preto

$$G_k^{(1)} = R_k^T H_k^{(1)} R_k - \mu R_k^T H_k R_k = R_k^T (H_k^{(1)} - \mu H_k) R_k.$$

Z čoho plynie

$$\det G_k^{(1)} = \det (H_k^{(1)} - \mu H_k).$$

□

Nasledujúca veta zovšeobecňuje vetu 6.8.

**Veta 6.15.** *Nech  $t \geq 1$ ,  $r$  je najväčší regulárny index menší alebo rovný ako  $t$ . Potom vlastné čísla dvojice  $(G_t^{(1)}, G_t)$  sú vlastné čísla dvojice  $(G_r^{(1)}, G_r)$  a o zvyšných vlastných číslach (bude ich  $t - r$ ) nemáme žiadnu informáciu.*

## 6.2 Algoritmus

Neznáme korene  $f$  môžeme spočítať pomocou vlastných čísel dvojice  $(G_n^{(1)}, G_n)$ . Potrebujeme však poznať  $n$  (počet navzájom rôznych koreňov) a FOP  $\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}$ . Pokiaľ  $t \in \{0, \dots, n-1\}$  bude regulárny index (tzn. matica  $G_t$  a teda i  $H_t$  bude regulárna), určíme korene  $\varphi_t$  pomocou vlastných čísel dvojice  $(G_t^{(1)}, G_t)$ . V opačnom prípade bude  $\varphi_t$  vnútorný polynóm. Na príklade si ilustrujme, ako by mohol algoritmus vypadať.

Najprv spočítame  $N = s_0 = \langle 1, 1 \rangle$ , teda počet všetkých koreňov funkcie  $f$ . Prepokladajme, že  $N = 10$ . Spočítame  $\mu = \frac{s_1}{s_0} = \frac{\langle 1, z \rangle}{\langle 1, 1 \rangle}$ . Polynóm  $\varphi_0$  a  $\varphi_1$  týmto už poznáme,  $\varphi_0(z) = 1$  a  $\varphi_1 = z - \mu$ . Otázkou je, či  $n = 1$  alebo  $n > 1$ . Pokiaľ by  $n = 1$ , potom by matica  $H_{1+t+1}$  a teda i  $G_{1+t+1}$  bola singulárna pre všetky  $t \geq 0$ . Keďže  $\varphi_1$  je regulárny FOP a platí  $\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = \frac{\det H_2}{\det H_1}$  (vid' veta 6.4),  $H_2$  a teda i  $G_2$  bude singulárna práve vtedy keď  $\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = 0$ . Predpokladajme, že  $\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle \neq 0$ . V tom prípade  $G_2$  bude regulárna, teda  $\varphi_2$  bude regulárny FOP a  $n > 1$ . Spočítaním vlastných čísel dvojice  $(G_2^{(1)}, G_2)$ , kde  $G_2^{(1)}$  a  $G_2$  budú vyzeráť (vid' štruktúru  $G_k^{(1)}, G_k$  z vety 6.11 a 6.13)

$$G_2 = \begin{bmatrix} s_0 & 0 \\ 0 & \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle \end{bmatrix} \quad G_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle \\ \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_1^2 \rangle \end{bmatrix},$$

získame  $\varphi_2$ . Teda  $\varphi_2(z) = (z - (\lambda_1 + \mu))(z - (\lambda_2 + \mu))$ , kde  $\lambda_1, \lambda_2$  sú vlastné čísla dvojice  $(G_2^{(1)}, G_2)$ . Spočítame  $\langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle$  (určuje nám, či je  $G_3$  regulárna, a teda či bude  $\varphi_3$  regulárny FOP). Prepokladajme, že  $\langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle = 0$ . To znamená, že  $\varphi_3$  bude vytvorený ako vnútorný polynóm. Ešte predtým musíme rozhodnúť, či  $n = 2$  alebo  $n > 2$ . V prípade, že  $n = 2$ ,  $G_{2+t+1}$  bude singulárna pre všetky  $t \geq 0$ .  $G_{2+t+1}$  je singulárna práve vtedy keď  $\langle z^t \varphi_2, \varphi_2 \rangle = 0$  (vid' dôkaz vety 6.13). Vieme, že  $n$  môže byť najviac  $N$ . Preto, pokiaľ  $G_3, \dots, G_N$  budú singulárne, bude  $n = 2$ . Hľadáme teda  $\tau \leq N - 2 - 1 = 7$  tak, aby  $\langle z^\tau \varphi_2, \varphi_2 \rangle \neq 0$  a  $\langle z^t \varphi_2, \varphi_2 \rangle = 0$ , pre  $t = 0, \dots, \tau - 1$ . Pokiaľ také  $\tau$  nenájde,  $n = 2$ . V prípade, že nájdeme také  $\tau$ , znamená to, že  $G_{2+\tau+1}$  je regulárna a  $G_3, \dots, G_{2+\tau}$  sú singulárne.  $\tau + 1$  určuje dĺžku bloku, ktorý začína regulárnym FOP  $\varphi_2$  a zvyšné polynómy sú vnútorné. Predpokladajme, že  $\langle z \varphi_2, \varphi_2 \rangle = 0$  a  $\langle z^2 \varphi_2, \varphi_2 \rangle \neq 0$ . To znamená, že polynómy  $\varphi_3$  a  $\varphi_4$  budú vnútorné a  $\varphi_5$  bude regulárny. Preto  $\varphi_3(z) = z\varphi_2(z)$ ,  $\varphi_4(z) = z^2\varphi_2(z)$  a korene  $\varphi_5$  získame pomocou vlastných čísel dvojice  $(G_5^{(1)}, G_5)$ , kde  $G_5^{(1)}$  a  $G_5$  budú vyzerať

$$G_5 = \begin{bmatrix} s_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \langle z^2 \varphi_2, \varphi_2 \rangle \\ 0 & 0 & 0 & \langle z^2 \varphi_2, \varphi_2 \rangle & \langle z^3 \varphi_2, \varphi_2 \rangle \\ 0 & 0 & \langle z^2 \varphi_2, \varphi_2 \rangle & \langle z^3 \varphi_2, \varphi_2 \rangle & \langle z^4 \varphi_2, \varphi_2 \rangle \end{bmatrix},$$

$$G_5^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & 0 & 0 & 0 \\ \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_1^2 \rangle & 0 & 0 & \langle z^2 \varphi_2, \varphi_2 \rangle \\ 0 & 0 & 0 & \langle z^2 \varphi_2, \varphi_2 \rangle & \langle z^2 \varphi_2, \varphi_1 \varphi_2 \rangle \\ 0 & 0 & \langle z^2 \varphi_2, \varphi_2 \rangle & \langle z^2 \varphi_2, \varphi_1 \varphi_2 \rangle & \langle z^3 \varphi_2, \varphi_1 \varphi_2 \rangle \\ 0 & \langle z^2 \varphi_2, \varphi_2 \rangle & \langle z^2 \varphi_2, \varphi_1 \varphi_2 \rangle & \langle z^3 \varphi_2, \varphi_1 \varphi_2 \rangle & \langle z^4 \varphi_2, \varphi_1 \varphi_2 \rangle \end{bmatrix}.$$

$\varphi_5$  bude mať tvar

$\varphi_5(z) = (z - (\lambda_1 + \mu))(z - (\lambda_2 + \mu))(z - (\lambda_3 + \mu))(z - (\lambda_4 + \mu))(z - (\lambda_5 + \mu))$ , kde  $\lambda_1, \dots, \lambda_5$  sú vlastné čísla dvojice  $(G_5^{(1)}, G_5)$ . Ďalej spočítame  $\langle \varphi_5, \varphi_5 \rangle$ . Predpokladajme, že  $\langle \varphi_5, \varphi_5 \rangle = 0$ , tzn.  $G_6$  bude singulárna. Hľadáme  $\tau \leq N - 5 - 1 = 4$  tak, aby  $\langle z^\tau \varphi_5, \varphi_5 \rangle \neq 0$  a  $\langle z^t \varphi_5, \varphi_5 \rangle = 0$ , pre  $t = 0, \dots, \tau - 1$ . Predpokladajme, že  $\langle z \varphi_5, \varphi_5 \rangle = \langle z^2 \varphi_5, \varphi_5 \rangle = \langle z^3 \varphi_5, \varphi_5 \rangle = \langle z^4 \varphi_5, \varphi_5 \rangle = 0$ . To znamená, že  $G_{10}$  bude singulárna, a preto  $n = 5$ . Našli sme teda 5 navzájom rôznych koreňov  $f$ , ktoré sú koreňmi  $\varphi_5$ . Násobnosti k týmto koreňom, určíme riešením sústavy (6.7).

V praxi však algoritmus tak „jednoducho“ fungovať nebude. Pre regulárne FOP  $\varphi_t$  platí, že determinant matice  $G_t$  je nenulový a v prípade vnútorného polynómu je nulový. Keďže determinant  $G_t$  je určený formou  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , ktorú získame pomocou numerickej integrácie (v našom prípade lichobežníkovým pravidlom), dostaneme jeho aproximáciu, ale nie skutočnú hodnotu. Preto, pokiaľ by sme vyhodnocovali tento determinant ako „byť rovný nule“, dostali by sme len regulárne FOP. Môže sa preto zdať, že vnútorné polynómy nie sú potrebné pre výpočet. Nazvime regulárny FOP  $\varphi_t$  dobre podmienený, ak príslušný problém hľadania koreňov tohoto polynómu, teda vlastných čísel dvojice  $(H_t^{(1)}, H_t)$  je dobre podmienený. Pre stabilný algoritmus je rozhodujúce generovať len dobre podmienené regulárne FOP. V tomto prístupe sú bloky  $\langle \Theta, \Theta \rangle$  „jemne“ väčšie ako je nutné nato, aby sme sa vyhli zle podmieneným blokom. Inými slovami, podmienka nato, aby bol  $\varphi_t$  regulárny, bude „jemne“ silnejšia, čím dostaneme viac vnútorných polynómov a tým aj väčšie bloky. Má to nasledujúcu nevýhodu. Nech

$\Theta = [\varphi_r \ z \varphi_r \ \dots \ z^{l-1} \varphi_r]$  je blok dĺžky  $l$ , ktorý začína dobre podmieneným regulárnym FOP. Matica  $\langle \Theta, \Theta \rangle$  nebude dolná trojuholníková, tzn. budeme teda musieť pridať prvky do matice  $G$  a  $G^{(1)}$ , pretože  $\langle z^\alpha \varphi_r, \varphi_q \rangle$  pre  $\alpha = 0, 1, \dots, l-1$ , bude nula len v prípade, že  $q = 0, 1, \dots, r - \alpha - 1$  a  $\langle z^\alpha \varphi_r, \varphi_1 \varphi_q \rangle$  pre  $\alpha = 0, 1, \dots, l-1$ , bude nula len v prípade, že  $q = 0, 1, \dots, r - \alpha - 2$ . [5].

Na vstupe algoritmu požadujeme tri hodnoty. Prvou bude forma  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  (vid' (6.1), teda integrál zahŕňajúci funkciu  $f$  a krivku  $\gamma$ , vo vnútri ktorej hľadáme korene  $f$ ) a hodnoty  $\varepsilon_{cond}$  a  $\varepsilon_{stop}$  tak, aby  $\varepsilon_{stop} < \varepsilon_{cond}$ . Hodnota  $\varepsilon_{cond}$  určuje dĺžku bloku a  $\varepsilon_{stop}$  určuje, kedy má algoritmus skončiť, teda pre nejaký polynóm  $\varphi_r$  bude  $r = n$ . Predpokladajme, že algoritmus vygeneruje nejaký regulárny FOP (prvý regulárny FOP je  $\varphi_0$ ). Pokiaľ  $|\langle \varphi_r, \varphi_r \rangle| \geq \varepsilon_{cond}$ , potom  $\varphi_{r+1}$  bude vygenerovaný ako regulárny FOP. V opačnom prípade hľadáme najmenšie  $t$  také, že  $t \leq N - 1 - r$  a  $|\langle z^t \varphi_r, \varphi_r \rangle| > \varepsilon_{cond}$ . Hodnota tohto  $t$  bude dĺžka bloku (teda presnejšie, dĺžka bloku bude  $t + 1$ ,  $t$  bude počet vnútorných polynómov v bloku). Pokiaľ také  $t$  nenájde, a zároveň  $|\langle z^t \varphi_r, \varphi_r \rangle| < \varepsilon_{stop}$  pre všetky  $t \in \{0, \dots, N - 1 - r\}$ , bude  $n = r$  a hľadané korene budú korene  $\varphi_r$ . Pokiaľ také  $t$  nenájde, a zároveň  $|\langle z^t \varphi_r, \varphi_r \rangle| \geq \varepsilon_{stop}$  pre nejaké  $t \in \{0, \dots, N - 1 - r\}$ , použijeme ako dĺžku bloku hodnotu  $m$ , pre ktorú platí  $|\langle z^m \varphi_r, \varphi_r \rangle| = \max_{0 \leq t \leq N-1-r} |\langle z^t \varphi_r, \varphi_r \rangle|$ .

Algoritmus bude vypadať nasledovne:

```

Vstup:  $\langle \cdot, \cdot \rangle, \varepsilon_{cond}, \varepsilon_{stop}$ , tak aby  $\varepsilon_{cond} > \varepsilon_{stop}$ 
Výstup:  $n$ , korene
 $N \leftarrow \langle 1, 1 \rangle$ 
if  $N = 0$  then
     $n \leftarrow 0$  korene  $\leftarrow \emptyset$ 
else
     $\varphi_0(z) \leftarrow 1$ 
     $\mu \leftarrow \langle z, 1 \rangle \setminus N$ ;  $\varphi_1(z) \leftarrow z - \mu$ 
     $r \leftarrow 1$ 
    while  $r < N$  do
        if  $|\langle \varphi_r, \varphi_r \rangle| \geq \varepsilon_{cond}$  then
            vygenerovať  $\varphi_{r+1}$  ako regulárny FOP pomocou vlastných čísel dvojice  $(G_r^{(1)}, G_r)$ 
             $r \leftarrow r + 1$ 
        else
            vsetky_male  $\leftarrow 1$ ; t_nenajdene  $\leftarrow 1$ ; maximum  $\leftarrow 0$ ;  $t \leftarrow 0$ 
            while t_nenajdene = 1 and  $t \leq N - 1 - r$  do
                el  $\leftarrow |\langle z^t \varphi_r(z), \varphi_r(z) \rangle|$ 
                if vsetky_male = 1 and  $(el < \varepsilon_{stop})$  then
                    vsetky_male  $\leftarrow 1$ 
                else
                    vsetky_male  $\leftarrow 0$ 
                end if
                if  $(el \geq \varepsilon_{cond})$  then
                    t_nenajdene  $\leftarrow 0$ ; t_large  $\leftarrow t$ 
                end if
                if  $(el > \text{maximum})$  then
                    maximum  $\leftarrow el$ ; t_max  $\leftarrow t$ 
                end if
                 $t \leftarrow t + 1$ 
            end while
            if t_nenajdene = 1 then
                if vsetky_male = 1 then
                     $n \leftarrow r$ ; korene  $\leftarrow \text{korene}(\varphi_r)$ ; stop
                else
                    dlzka_bloku  $\leftarrow t\_max$ 
                end if
            else
                dlzka_bloku  $\leftarrow t\_large$ 
            end if
            for  $i = 1 : \text{dlzka\_bloku}$  do
                 $\varphi_{r+i}(z) \leftarrow z^i \varphi_r(z)$ 
            end for
            vygenerovať  $\varphi_{r+\text{dlzka\_bloku}+1}$  ako regulárny FOP pomocou vlastných čísel dvojice  $(G_{r+\text{dlzka\_bloku}}^{(1)}, G_{r+\text{dlzka\_bloku}})$ 
             $r \leftarrow r + \text{dlzka\_bloku} + 1$ 

```



## 6 FORMÁLNE ORTOGONÁLNE POLYNÓMY

```

    end if
  end while
   $n \leftarrow N$ ; korene  $\leftarrow$  korene( $\varphi_N$ ); stop
end if

```

### 6.3 Numerické výsledky

Vo všetkých nasledujúcich príkladoch budeme formu  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  aproximovať lichobežníkovým pravidlom s ukončujúcou podmienkou na zdvojnásobovanie dielkov  $\varepsilon_{int} = 0.01$ , počínajúc 150 dielkami.

**Príklad 6.** Majme funkciu

$$f(z) = (z - 0.5)(z - 1)(z - 1.5)(z - 2)(z - 2.5)(z - 3)(z - 3.5)(z - 4)(z - 4.5)(z - 5).$$

Táto funkcia má korene  $z_i = 0.5 \cdot i$ ,  $i = 1, \dots, 10$  a  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{10} = 1$  (korene uvažujeme v kruhu so stredom v počiatku a s polomerom  $\frac{11}{2}$ ).

Aplikujme algoritmus FOP. Zvoľme  $\varepsilon_{cond}$  (určujúci dĺžku bloku),  $\varepsilon_{cond} = 1$  a  $\varepsilon_{stop} = 10^{-12}$ . Algoritmus vygeneruje len regulárne FOP, rozhodne, že  $n = 10$  a určí aproximáciu koreňov pomocou vlastných čísel dvojice  $(G_{10}^{(1)}, G_{10})$ . Aproximácia bude celkom presná:

$$\begin{aligned}
 z_1 &= +4.99999999999999950887822831 & +2.236535001858565543814570 \cdot 10^{-14}i; \\
 z_2 &= +0.49999999999999995029008910 & +4.762471870602171360063338 \cdot 10^{-14}i; \\
 z_3 &= +4.4999999999999995536126672912 & +1.995609219048099304273401 \cdot 10^{-12}i; \\
 z_4 &= +0.9999999999999992112028176322 & +3.713184136420295955567267 \cdot 10^{-12}i; \\
 z_5 &= +3.99999999999999921349794339356 & +3.524960073596153508602400 \cdot 10^{-11}i; \\
 z_6 &= +1.49999999999999983118456208806 & +5.593682728889198282869536 \cdot 10^{-11}i; \\
 z_7 &= +3.499999999999999533539946776575 & +2.122334507166894810155582 \cdot 10^{-10}i; \\
 z_8 &= +1.999999999999999410742714758237 & +2.820584180739432275391597 \cdot 10^{-10}i; \\
 z_9 &= +2.999999999999999863309276275573 & +5.277233499172038252546113 \cdot 10^{-10}i; \\
 z_{10} &= +2.499999998772024033290489 & +5.809189400056830760325972 \cdot 10^{-10}i;
 \end{aligned}$$

a príslušné násobnosti k týmto koreňom

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= +1.000000618155722521793686 & -2.573972910278876570143031 \cdot 10^{-13}i; \\
 \alpha_2 &= +0.999999999999999827547595634 & +5.365452148362951083613341 \cdot 10^{-13}i; \\
 \alpha_3 &= +1.0000000000031687555447961 & -1.410241553724440107888973 \cdot 10^{-11}i; \\
 \alpha_4 &= +0.9999999999947001798808047 & +2.514171147599867772549327 \cdot 10^{-11}i; \\
 \alpha_5 &= +1.000000000357963845258963 & -1.611459362749514462708630 \cdot 10^{-10}i; \\
 \alpha_6 &= +0.999999999507057559590359 & +2.367676700787758844220548 \cdot 10^{-10}i; \\
 \alpha_7 &= +1.000000001227101587195130 & -5.662898831500744005676590 \cdot 10^{-10}i; \\
 \alpha_8 &= +0.999999998636941611416995 & +6.487544104078801885737354 \cdot 10^{-10}i; \\
 \alpha_9 &= +1.000000001086867450406649 & -5.262234507708177835017824 \cdot 10^{-10}i; \\
 \alpha_{10} &= +0.99999999206067298617283 & +3.568187458466277732465637 \cdot 10^{-10}i.
 \end{aligned}$$

61



## 6 FORMÁLNE ORTOGONÁLNE POLYNÓMY

$\varepsilon_{cond} = 0.1$  a  $\varepsilon_{stop} = 10^{-12}$ . Algoritmus vygeneruje len regulárne FOP a rozhodne, že  $n = 4$ .

Aproximované korene budú

$$\begin{aligned} z_1 &= -1.815599967527762329944611 + 7.372743834569443620859560 \cdot 10^{-21}i; \\ z_2 &= +0.509287914465280161524501 - 1.302159022859330474464708i; \\ z_3 &= +0.509287914465280161539503 + 1.302159022859330474454004i; \\ z_4 &= +0.016808019776392975361102 + 2.907582895955905573196906 \cdot 10^{-21}i; \end{aligned}$$

a príslušné násobnosti k týmto koreňom

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= +1.055230342613991819839879 + 1.439436960240952502922623 \cdot 10^{-20}i; \\ \alpha_2 &= +1.074677398053310340309933 + 0.009757868472197274780521i; \\ \alpha_3 &= +1.074677398053310340316275 - 0.009757868472197274740572i; \\ \alpha_4 &= +0.795420084097711800197583 - 5.434311066755535397960945 \cdot 10^{-20}i. \end{aligned}$$

Pokiaľ zvolíme  $\varepsilon_{cond} = 1$  a  $\varepsilon_{stop} = 10^{-12}$ , algoritmus rozhodne, že  $n = 4$ , vygeneruje  $\varphi_0, \varphi_1$  ako regulárny FOP,  $\varphi_2$  vygeneruje ako vnútorný polynóm,  $\varphi_3$  a  $\varphi_4$  ako regulárne FOP. Aproximácia koreňov je nasledovná:

$$\begin{aligned} z_1 &= -1.844233953262213374915927 + 2.349175682278690796103235 \cdot 10^{-25}i; \\ z_2 &= +0.530894930292930532471838 + 1.331791876751120929433932i; \\ z_3 &= +0.530894930292930532471834 - 1.331791876751120929433931i; \\ z_4 &= -7.1 \cdot 10^{-24} + 9.737750774579561008880085 \cdot 10^{-24}i; \end{aligned}$$

a príslušné násobnosti k týmto koreňom

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= +1.000005222818324300664046 + 2.736962428291107697643989 \cdot 10^{-24}i; \\ \alpha_2 &= +0.999999999999999999999791 + 7.194640494331737258817867 \cdot 10^{-23}i; \\ \alpha_3 &= +0.999999999999999999999798 - 6.463257029874457045741021 \cdot 10^{-23}i; \\ \alpha_4 &= +1.000000000000000000000032 - 1.029079707286390982841245 \cdot 10^{-23}i. \end{aligned}$$

Tento príklad ilustruje ako je dôležité generovať len dobre podmienené regulárne FOP. Ako už bolo spomenuté, je vhodné zvoliť bloky „jemne“ väčšie, aby sa predišlo zle podmieneným regulárnym FOP. V tomto prípade, keby bolo  $\varepsilon_{cond} = 0.1$ , každý blok by mal dĺžku jedna - teda boli by v ňom len regulárne FOP. V prípade, že  $\varepsilon_{cond} = 1$ , druhý blok bude mať dĺžku dva - bude sa v ňom vyskytovať regulárny FOP  $\varphi_1$  a vnútorný polynóm  $\varphi_2$ . Aproximácia koreňov bude tým o niečo presnejšia.

## 7 Záver

Táto práca sa zaoberala vlastnosťami koreňov holomorfných funkcií a následne metódami pre aproximáciu týchto koreňov. Cieľom práce bolo zoznámiť sa s teóriou komplexných funkcií, predovšetkým teóriou reziduí. To sme využili pri odvodení metód hľadajúcich neznáme korene.

Všetky korene funkcie  $f$  vo vnútri krivky  $\gamma$  nie je tak jednoduché získať. Software Maple alebo Matlab vždy určia len jeden koreň danej funkcie, pokiaľ sa nejedná o polynóm. Táto práca obsahuje metódy, ktoré aproximujú všetky korene  $f$  v  $\text{int } \gamma$ .

Metóda Newtonových súm je založená na vytvorení polynómu stupňa  $N$  ( $N$  je počet všetkých koreňov vrátane násobností funkcie  $f$  v  $\text{int } \gamma$ ), majúceho rovnaké korene ako  $f$ . Koeficienty tohto polynómu získame riešením sústavy obsahujúcej hodnoty získané numerickou integráciou. Problém hľadania koreňov pomocou tejto metódy je zle podmienený v tom zmysle, že pokiaľ zmeníme hodnoty danej sústavy veľmi malo, dostaneme veľké zmeny v koreňoch polynómu, ktorého koeficienty sú riešením tejto sústavy. Čím väčšie bude  $N$ , tým horšie bude podmienený problém hľadania koreňov  $f$ . Táto zlá podmienenosť sa dá čiastočne vyriešiť tým, že vnútro danej krivky rozdelíme na niekoľko podoblastí, v ktorých sa vyskytuje len predom zvolený malý počet koreňov. Pokiaľ má však  $f$  koreň veľkej násobnosti, delenie vnútra krivky neprinesie úspech.

Metóda založená na formálnych ortogonálnych polynómoch spočíva vo vytvorení polynómu stupňa  $n$  ( $n$  je počet všetkých navzájom rôznych koreňov  $f$  v  $\text{int } \gamma$ ), ktorý má rovnaké korene ako  $f$ . Korene tohto polynómu sú vlastné čísla dvojice istých matíc. V porovnaní s metódou Newtonových súm nám táto metóda dáva lepšiu aproximáciu koreňov.

Možným pokračovaním práce by mohol byť odhad chyby aproximovaných koreňov pomocou oboch metód.

### 8 Literatúra

- [1] BOUCHALA J. *Funkce komplexní proměnné*, Skripta Vysoká škola Báňská-Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni, 2012.
- [2] KRAVANJA P., SAKURAI T., VAN BAREL M. *On Locating Clusters Of Zeros Of Analytic Function*, [online]. dostupné z: [http://www.kravanja.eu/pdf\\_files/Kravanja-1999-clusters.pdf](http://www.kravanja.eu/pdf_files/Kravanja-1999-clusters.pdf).
- [3] DELVES L.M., LYNESS J.N. *A Numerical Method for Locating the Zeros of an Analytic Function*, [online]. dostupné z: <http://www.ams.org/journals/mcom/1967-21-100/S0025-5718-1967-0228165-4/S0025-5718-1967-0228165-4.pdf>.
- [4] KRAVANJA P., VAN BAREL M., HAEGEMANS A. *Computing zeros of analytic functions via modified moments based on formal orthogonal polynomials*, [online]. dostupné z: <http://www.cs.kuleuven.be/publicaties/rapporten/tw/TW246.pdf>.
- [5] KRAVANJA P., VAN BAREL M., HAEGEMANS A. *On Computing Zeros of Analytic Functions and Related Problems in Structured Numerical Linear Algebra*, [online]. dostupné z: [http://www.kravanja.eu/pdf\\_files/Kravanja-1999-PhD.pdf](http://www.kravanja.eu/pdf_files/Kravanja-1999-PhD.pdf)
- [6] KOŘÍNEK V. *Základy algebry*, Praha: NČAV, 1956.
- [7] VESELÝ J. *Komplexní analýza pro učitele*, Praha: Karolinum, 2000.
- [8] LAZER A.C. *From the Cauchy-Riemann Equations to the Fundamental Theorem of Algebra*, Mathematics Magazine, Volume 79, Number 3, 210-213(4), June 2006.
- [9] VODSTRČIL P. *Čemu vděčíme za základní větu algebry?*, [online]. dostupné z: [http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/zakladni\\_veta\\_algebry\\_vodstrcil.pdf](http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/zakladni_veta_algebry_vodstrcil.pdf).
- [10] BOUCHALA, J. *Čemu vděčíme za základní větu algebry?*, [online]. dostupné z: [http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/zakladni\\_veta\\_algebry\\_bouchala.pdf](http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/zakladni_veta_algebry_bouchala.pdf).
- [11] KALAS J. *Analýza v komplexním oboru*, Brno, Masarykova univerzita, 2006, ISBN 80-210-4045-9.
- [12] BOUCHALA J., VODSTRČIL P. *Drobná překvapení spojená s numerickou integrací. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Jednota českých matematiků a fyziků.*, [online]. dostupné z: [http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/141970/PokrokyMFA\\_55-2010-4\\_2.pdf](http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/141970/PokrokyMFA_55-2010-4_2.pdf).

### A Prílohy na CD

Priložené CD obsahuje nasledujúce súbory:

- `metoda_newtonovych_sum.mw` - mapleovský súbor s procedúrami a príkladmi z kapitoly Metóda Newtonových súm
- `metoda_newtonovych_sum.pdf` - vyexportovaný súbor s procedúrami a príkladmi z kapitoly Metóda Newtonových súm
- `formalne_ortogonalne_polynomy.mw` - mapleovský súbor s procedúrami a príkladmi z kapitoly Formálne ortogonálne polynómy
- `formalne_ortogonalne_polynomy.pdf` - vyexportovaný súbor s procedúrami a príkladmi z kapitoly Formálne ortogonálne polynómy